Übungen zur Vorlesung **WS 2014/15**
Theoretische Physik LA 1: **Blatt 1**
Mechanik/Quantenmechanik Ausgabedatum: 20.10.2014

Die Übungsblätter sowie weitere wichtige Informationen zur Vorlesungen sind unter

http://www.itap.physik.uni-stuttgart.de/lehre/vorlesungen/WS14/mqm/

abrufbar.

In der Theoretischen Physik werden tiefe Kenntnisse der Integral- und Differenzial-Rechnung benötigt. In den kommenden Aufgaben frischen Sie Ihr Können aus der Vorlesung Mathematische Methoden der Physik auf.

Aufgabe 1 (Schriftlich) Linienintegral — 8 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}\,.$$

(a) Skizzieren Sie dieses. Wo ist $\mathbf{F}(x,y,z)$ undefiniert? (2 Punkte)

(b) $\mathcal{C}$ sei der positiv orientierte Kreis mit Radius R in der x-y-Ebene um den Koordinatenursprung:

$$\mathcal{C} : \varphi \to R\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0; 2\pi)\,.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

$\mathbf{F}$ sei die Kraft, die entlang des Weges $\mathcal{C}$ auf ein Teilchen angewendet wird. Welcher physikalischen Größe entspicht damit das Kurvenintegral? (3 Punkte)

(c) Ermitteln Sie $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ für $x^2+y^2 \neq 0$ und vereinfachen Sie das Ergebnis. (1 Punkt)

(d) Was bedeutet dies hinsichtlich des Satzes von Stokes für das Integral

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

und wie kann man den (scheinbaren) Widerspruch zu dem Ergebnis aus (b) erklären? Beim Durchlaufen welcher geschlossenen Wege kann ein Teilchen damit Energie gewinnen oder verlieren? (2 Punkte)

Aufgabe 2 (Votier) Fallendes Teilchen — 8 Punkte

(a) Gegeben sei ein Teilchen der Masse m, dessen Bewegung sich durch die Newton'sche Gleichung

$$m\ddot{x}(t) = -mg$$

beschreiben lässt (g=konst.). Welche Bahnkurve erwarten Sie? Ist der Ansatz einer Exponentialfunktion gerechtfertigt? Berechnen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ dieser Differenzialgleichung. Zwei Teilchen derselben Form aber unterschiedlicher Masse genügen den Anfangsbedingungen $x(0) = 1\mathrm{m}$ und $v(0) = 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Welches Teilchen erreicht zuerst $x = 0\mathrm{m}$? Welchen Bezug zum freien Fall im Schwerefeld der Erde können Sie herstellen? (4 Punkte)

(b) Im Falle einer geschwindigkeitsabhängigen Reibung verändere sich die Gleichung folgendermaßen:

$$m\ddot{x}(t) = -mg - \gamma\dot{x}(t)$$

(γ=konst.). Benennen Sie ein System, das beispielhaft durch diesen Ansatz beschrieben werden kann. Betrachten Sie die Differenzialgleichung für $v = \dot{x}(t)$. Berechnen Sie zunächst eine Lösung für den homogenen Fall und finden Sie dann eine Partikulärlösung. Bestimmen Sie die freien Konstanten für die Anfangsbedingungen $x(0) = h_0$ und $\dot{x}(0) = 0$. Existiert eine maximal erreichbare Geschwindigkeit? Vergleichen Sie qualitativ die Resultate aus (a) und (b). (4 Punkte)

Aufgabe 3 (Votier) Raumkurven — 9 Punkte

Die Lorentzkraft und die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem Magnetfeld werden bereits im Gymnasium behandelt. Die Lösung der zugehörigen Differenzialgleichungen führe unter Berücksichtigung der Randbedingungen auf folgende Bahn $\mathbf{r}(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) =& R\,\cos(\omega\,t)\ , \\ y(t) =& R\,\sin(\omega\,t)\ , \\ z(t) =& \qquad v_z\,t\ . \end{aligned}$$

(a) Ermitteln Sie hieraus den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ und den Beschleunigungsvektor $\mathbf{b}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}$, sowie deren Beträge $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ und $b(t) = |\mathbf{b}(t)|$. (3 Punkte)

(b) Berechnen Sie aus der Geschwindigkeit $v(t)$ durch Integration den zurückgelegten Weg $s(t)$. Geben Sie die Bahnkurve in Abhängigkeit von s an. Bestimmen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$. Verifizieren Sie die Beziehung $\mathbf{v}(t) = v(t) \cdot \mathbf{t}$. (3 Punkte)

(c) Durch Differenziation von $\mathbf{t}$ nach s und Normierung erhält man den Kurvennormalenvektor $\mathbf{n} = r\,\frac{d\mathbf{t}}{ds}$. Wie groß ist der Krümmungsradius r? Skizzieren Sie die Bahnkurve sowie $\mathbf{v}(\tau)$, $\mathbf{b}(\tau)$, $\mathbf{t}(\tau)$ und $\mathbf{n}(\tau)$ für einen beliebig gewählten Zeitpunkt τ. (3 Punkte)