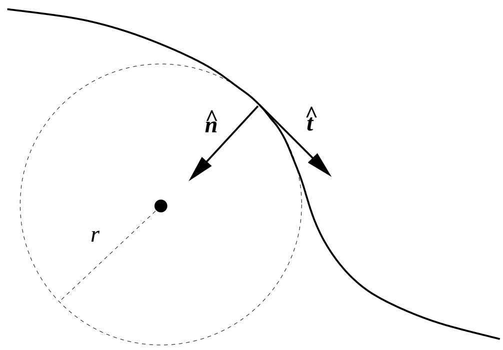
Übungen zur Vorlesung **WS 2014/15**
Theoretische Physik LA 1: **Blatt 2**
Mechanik/Quantenmechanik Ausgabedatum: 30.10.2014

Aufgabe 4 (Schriftlich) Begleitendes Dreibein **11 Punkte**

Seien $\hat{\boldsymbol{t}}(s)$ die Tangentenvektoren in der Parametrisierung der Bahnlänge. Dann heißt

$$\hat{\boldsymbol{n}}(s) := \frac{d\hat{\boldsymbol{t}}}{ds} \Big/ \left|\frac{d\hat{\boldsymbol{t}}}{ds}\right|$$

der *Hauptnormalenvektor*, $\hat{\boldsymbol{n}} \perp \hat{\boldsymbol{t}}$, und der Vektor $\hat{\boldsymbol{a}}$, der $(\hat{\boldsymbol{t}}, \hat{\boldsymbol{n}})$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis ergänzt, der *Binormalenvektor* von $\vec{r}$ bei s. $(\hat{\boldsymbol{t}}, \hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{a}})$ heißt das *begleitende Dreibein* der Kurve. $(\hat{\boldsymbol{t}}, \hat{\boldsymbol{n}})$ spannen die *„Schmiege-“ (oder oskulierende) Ebene* auf.



Betrachten Sie die Bewegung des geladenen Teilchens im Magnetfeld aus Aufgabe 3.

(a) Berechnen Sie den Binormalenvektor $\mathbf{a} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ und zeigen Sie, dass das Dreibein $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{a})$ orthonormiert ist. Was ist der Unterschied zwischen diesem Dreibein und dem Dreibein, das aus den kartesischen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_j$ gebildet wird? (3 Punkte)

(b) Zerlegen Sie den Beschleunigungsvektor $\mathbf{b}(t)$ bezüglich des mitbewegten Dreibeins und geben Sie die Normalbeschleunigung an ($\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} =?$). (2 Punkte)

(c) Welche geometrische Kurve wird durch $\mathbf{r}(t)$ beschrieben? Fertigen Sie eine Zeichnung an, die auch das oben berechnete Dreibein enthält. (1 Punkt)

(d) Wie stark muss ein (homogenes) Magnetfeld $\mathbf{B}$ in z-Richtung sein, damit ein Teilchen mit Masse m und Ladung e der oben angegebenen Bahnkurve folgt? (2 Punkte)

(e) Die Ableitung des Binormalenvektors nach der Bahnlänge ist proportional zum Normalenvektor:

$$\frac{d\,\mathbf{a}}{ds} = -\frac{\mathbf{n}}{\tau}$$

τ heißt Windung der Kurve, und gibt an, wie stark sich die Kurve aus der Schmiegebene (aufgespannt durch $\mathbf{t}$ und $\mathbf{n}$) herauswindet. Wie groß ist die Windung τ für unsere Schraubenlinie? Wie lautet die Darstellung von $d\,\mathbf{n}/ds$ als Linearkombination von $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ und $\mathbf{a}$? Drücken Sie dabei die Koeffizienten durch den Krümmungsradius r und die Windung τ aus. (3 Punkte)

Aufgabe 5 (Votier) Zylinder- und Polarkoordinaten **4 Punkte**

Die dreidimensionale, kräftefreie Bewegung lässt sich sehr leicht in kartesischen Koordinaten beschreiben. Die folgende Aufgabe wird zeigen, dass dieses Problem auch in Zylinder- oder Polarkoordinaten gelöst werden kann, obwohl diese nicht die bestangepassten Koordinatensysteme sind. Dabei wird ein Ausdruck für die Beschleunigung hergeleitet, der bei allen Problemen, die in solchen Koordinaten gelöst werden, nützlich ist.

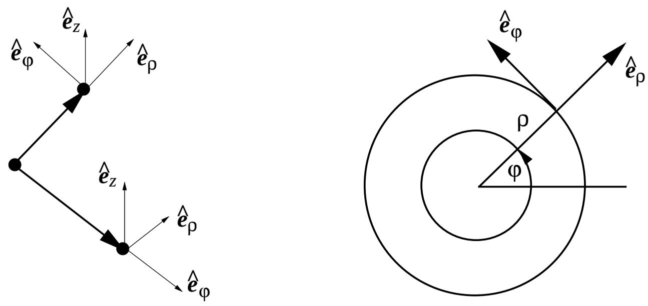
Ausgangspunkt ist die Darstellung des Ortsvektors in den neuen Koordinaten (Vorlesung):

$$\mathbf{r} = \rho(t)\,\mathbf{e}_\rho(\mathbf{r}(t)) + z(t)\,\mathbf{e}_z \qquad \text{(Zylinderkoordinaten)}$$
$$\mathbf{r} = r(t)\,\mathbf{e}_r(\mathbf{r}(t)) \qquad \text{(Polarkoordinaten)}$$

(a) Die Newton'sche Bewegungsgleichung im kräftefreien Fall lautet $m\,\ddot{\mathbf{r}} = 0$. Schreiben Sie diese Gleichung in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z):

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = (\dots)\,\mathbf{e}_\rho + (\dots)\,\mathbf{e}_\varphi + (\dots)\,\mathbf{e}_z = 0 \tag{1}$$

und beachten Sie dabei, dass die Basisvektoren von ihrem Aufpunkt und damit implizit von der Zeit abhängen. (4 Punkte)



(b) **Vortragsübung:** Durch Nullsetzen der einzelnen Komponenten von (1) erhalten Sie ein Differenzialgleichungssystem zweiter Ordnung für ρ, φ und z. Lösen Sie dieses, indem Sie aus der φ–Gleichung $\dot{\varphi}$ berechnen und nach Einsetzen in die ρ–Gleichung eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung nur in ρ erhalten. Multiplizieren Sie diese mit $\dot{\rho}$ und integrieren Sie anschließend.

Führen Sie in der Lösung $\rho(t)$, $\varphi(t)$ und $z(t)$ diejenigen Größen als Integrationskonstanten ein, bei denen ρ minimal wird. Stimmt das Resultat mit dem überein, welches Sie für eine kräftefreie Bewegung erwarten (Skizze mit Bestimmung von $\rho(t)$)?

(c) **Vortragsübung:** Leiten Sie die zu (1) analoge Gleichung für Polarkoordinaten ab:

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = (\dots)\,\mathbf{e}_\rho + (\dots)\,\mathbf{e}_\varphi + (\dots)\,\mathbf{e}_\vartheta = 0 \tag{2}$$

Aufgabe 6 (Votier) Vektorfelder **11 Punkte**

Im Folgenden untersuchen Sie wie in Aufgabe 1, ob verschiedene Vektorfelder ein Potenzial besitzen. Hierzu verwenden Sie zu Übungszwecken unterschiedliche Integrationswege und Koordinatensysteme.

(a) Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{F}_1 = -y\,\mathbf{e}_x + x\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z$. Skizzieren Sie dieses für $z \equiv 0$ und berechnen Sie $\nabla \times \mathbf{F}_1$ mit

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \ .$$

Besitzt dieses Vektorfeld ein Potenzial mit $\mathbf{F}_1 = -\nabla\, U_1$? (2 Punkte)

(b) Die Aussage über die Existenz eines Potenzials soll am Beispiel des Linienintegrals

$$\oint_{\mathcal{C}_1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_1$$

überprüft werden. Der geschlossene Weg $\mathcal{C}_1$ gehe dabei auf Geraden von (0, 0, 0) über (1, 0, 0), (1, 1, 0) und (0, 1, 0) wieder zurück zum Ursprung (0, 0, 0). Ist das Resultat konsistent mit dem Ergebnis aus (a)? (2 Punkte)

(c) Überprüfen Sie die obigen Rechnungen, indem Sie $\mathbf{F}_1$ in Zylinderkoordinaten schreiben. Es ist dann

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \ .$$

Beachten Sie, dass $\partial \mathbf{e}_\varphi / \partial \varphi \neq 0$! Verwenden Sie zur Berechnung des Linienintegrals diesmal einen in der x–y–Ebene liegenden Kreis um den Ursprung mit Radius $R(\mathcal{C}_2)$:

$$\oint_{\mathcal{C}_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_1 = R \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{F}_1 \ .$$

Wie erhält man die rechte Seite dieser Gleichung? (3 Punkte)

(d) Ein zweites Vektorfeld sei gegeben durch $\mathbf{F}_2 = -x\,\mathbf{e}_x - y\,\mathbf{e}_y - z\,\mathbf{e}_z$. Fertigen Sie eine Skizze des Vektorfeldes an und zeigen Sie, dass es ein Potenzial besitzt. ($\nabla \times \mathbf{F}_2 = ?$) (2 Punkte)

(e) Bestimmen Sie das Potenzial $U_2\,(x, y, z)$, das mit dem Vektorfeld über $\mathbf{F}_2 = -\nabla\, U_2$ verknüpft ist, wobei $U_2(\mathbf{0}) = 0$ sein soll. Verwenden Sie zur Integration einen geeigneten Weg Ihrer Wahl. Welches physikalische System beschreibt U_2? (2 Punkte)