Übungen zur Vorlesung **WS 2011/12**
Theoretische Physik LA 1: **Blatt 3**
Mechanik/Quantenmechanik Ausgabedatum: 6.11.2014

Aufgabe 7 Kraftfeld aus gegebenen Teilchenbahnen — Vortragsübung

Im Allgemeinen wird die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

dazu benutzt, um bei gegebenem Kraftfeld $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ die Bahnkurve $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ einer Punktmasse in diesem Kraftfeld zu berechnen. Bei unbekannter Kraft $\mathbf{F}$ kann man aber auch umgekehrt die Newton'sche Gleichung verwenden, um durch Beobachtung der Teilchenbahnen $\mathbf{r}(t)$ auf das Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ zu schließen. Zu diesem Zweck werden unter allen möglichen Anfangsbedingungen Teilchen der Masse m in das Kraftfeld "hineingeworfen" und ihre Bahnkurven $\mathbf{r}(t)$ verfolgt.

Ein Physiker verfolgt nun den letzteren Ansatz und erhält in einem Experiment Bahnkurven, die alle die Gestalt

$$\mathbf{r}(t) = a\,\cos(\omega\,t + \alpha)\,\mathbf{e}_x + b\,\cos(\omega\,t + \beta)\,\mathbf{e}_y + c\,\cos(\omega\,t + \gamma)\,\mathbf{e}_z$$

besitzen, wobei die Konstanten a, b, c, α, β und γ von der jeweiligen Anfangsbedingung abhängig sind. Betrachten Sie den Drehimpuls und bringen Sie die Bahnkurven in eine geeignetere mathematische Form. Wie lauten das Kraftfeld und das zugehörige Potenzial? Welches physikalische System wurde untersucht?

(a) Zeigen Sie zunächst, dass der *Drehimpuls* $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ in diesem Kraftfeld eine *Erhaltungsgröße* ist ($\mathbf{L} = \text{const.}$). Weisen Sie nach, dass die Bewegung in einer Ebene verläuft.

(b) Bestimmen Sie Lage und geometrische Gestalt der Bahnkurven. Zeigen Sie zunächst mit Hilfe einer trigonometrischen Identität, dass $\mathbf{r}(t)$ folgende Form annimmt

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{C}\,\cos(\omega\,t) - \mathbf{S}\,\sin(\omega\,t) \tag{1}$$

und bestimmen Sie $\mathbf{C}$ und $\mathbf{S}$. Berechnen Sie die Zeiten τ, zu denen der Abstand vom Ursprung extremal ist. $\mathbf{r}(t-\tau)$ eignet sich zur Diskussion der Bahnkurve, wenn es wieder in die Form (1) mit neuen Vektoren $\mathbf{C}_0$ und $\mathbf{S}_0$ gebracht wird. Zeigen Sie, dass $\mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{S}_0 = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass der Betrag $L = |\mathbf{L}|$ des Drehimpulses nur vom Flächeninhalt der ebenen Bahnkurve abhängt.

(d) Aus der Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ lässt sich mit Hilfe der Newton'schen Bewegungsgleichung der zeitliche Verlauf der Kraft $\mathbf{F}$ bestimmen. Eliminieren Sie die Zeit und geben Sie das Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ an. Zeigen Sie, dass das Kraftfeld ein Potenzial $U(\mathbf{r})$ besitzt und berechnen Sie dieses.

Aufgabe 8 (Schriftlich) Gravitationspotenzial **7 Punkte**

(a) Ein Potenzial U hänge nur vom Betrag $r = |\mathbf{r}|$ des Ortsvektors $\mathbf{r}$ ab ($U = U(r)$). Zeigen Sie, dass

$$\nabla U(r) = \left(\frac{d}{dr} U(r) \right) \hat{\mathbf{r}} \,, \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} \,.$$

Welche Eigenschaft zeichnet dieses Vektorfeld aus? (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie mit obiger Formel das zum Gravitationspotenzial $U = \gamma/r$ gehörige Kraftfeld $\mathbf{G} = -\nabla U$. Wie müssen Sie den Weg eines Linienintegrals wählen, damit Sie aus $\mathbf{G}$ das Potenzial U zurückerhalten? (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass tatsächlich $\operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{0}$ gilt. Sie haben damit an einem Beispiel die Identität $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U \equiv \mathbf{0}$ bestätigt. Wie können Sie diese Identität unter Verwendung des ∇–Operators plausibel machen? (3 Punkte)