Übungen zur Vorlesung | **WS 2011/12**
Theoretische Physik LA 1: | **Blatt 4**
Mechanik/Quantenmechanik | Ausgabedatum: 13.11.2014

Aufgabe 9 (Votier) Kepler-Problem, kartesische Koordinaten — 10 Punkte

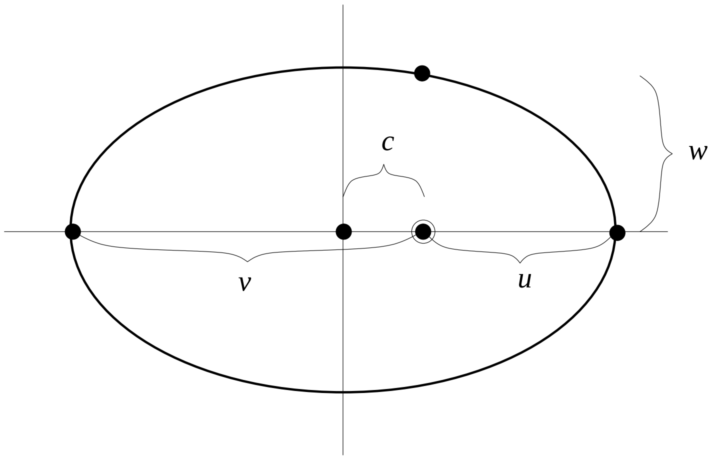
Das erste Kepler-Gesetz lautet: *Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.*

Es sei r der Abstand zwischen einem Planeten und der Sonne in Abhängigkeit des Winkels φ. Die zugehörige Lösung der Bewegungsgleichung für das Kepler-Problem ist laut Vorlesung

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}\,, \tag{1}$$

wobei ε die numerische Exzentrizität ist und p die Dimension einer Länge besitzt. Es sei $\varphi_0 = 0$ und es gelte $0 < \varepsilon < 1$, $p > 0$. Bestätigen Sie das erste Kepler-Gesetz und bestimmen Sie die Hauptachsen der elliptischen Bahnen.

(a) Berechnen Sie $u := r(0)$, $v := r(\pi)$, $w := r(\frac{\pi}{2}) = r(\frac{3}{2}\pi)$ und c (siehe Skizze). (2 Punkte)



(b) Parametrisieren Sie x und y folgendermaßen (wieso?):

$$x = r\cos\varphi\ + c\,, \tag{2}$$
$$y = r\sin\varphi\,. \tag{3}$$

Berechnen Sie r^2 mit Hilfe von (2) und (3). (2 Punkte)

(c) Setzen Sie (2) in (1) ein und berechnen Sie daraus erneut r^2. (2 Punkte)

(d) Welche Beziehung erhalten Sie durch Gleichsetzen der beiden Resultate? Zeigen Sie zunächst, dass $-2c + 2\varepsilon p + 2\varepsilon^2 c = 0$. Zudem sei $a := \frac{p}{1-\varepsilon^2}$. Wie lautet das vereinfachte Endergebnis ($\frac{x^2}{\cdots} + \frac{y^2}{\cdots} = 1$)? Interpretieren Sie das Resultat. (4 Punkte)

Aufgabe 10 (Schriftlich) Kepler-Problem, Absolutkoordinaten 8 Punkte

Die Lösung des Kepler-Problems in Gleichung (1) ist in Relativkoordinaten gegeben. Führen Sie die Schwerpunktkoordinate $\mathbf{r}_s := \frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}$ ein, transformieren Sie auf Absolutkoordinaten und ermitteln Sie damit die Bahnen der Himmelskörper.

(a) Für die beiden Körper gilt $m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = F_{21}$ und $m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = F_{12} = -F_{21}$. Wie nennt man dieses Gesetz? (1 Punkt)

(b) Zeigen Sie, dass $\ddot{\mathbf{r}}_s = 0$ gilt, der Schwerpunkt sich also gleichförmig bewegt. (1 Punkt)

(c) Der Schwerpunkt liege nun im Koordinatenursprung ($\mathbf{r}_s = 0$). Was folgt daraus für die Bahnen $\mathbf{r}_1(\mathbf{r})$ und $\mathbf{r}_2(\mathbf{r})$ der beiden Körper? Berechnen Sie $r_1(\varphi)$ und $r_2(\varphi)$. (4 Punkte)

(d) Skizzieren Sie die zugehörigen Bahnen. Zeichnen Sie die Lage der beiden Körper für zwei frei gewählte Zeitpunkte ein. Benutzen Sie hierzu: $\cos(\varphi+\pi) = -\cos(\varphi)$, $c = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$. (2 Punkte)

Aufgabe 11 Lenz'scher Vektor Vortragsübung

Sie kennen von verschiedenen physikalischen Problemstellungen Erhaltungsgrößen wie z.B. die Energie, den Impuls und den Drehimpuls. Im Falle des Kepler-Problems gibt es eine weitere Erhaltungsgröße, den sogenannten Lenz'schen Vektor, den Sie in dieser Aufgabe näher untersuchen werden. Die zugehörige Bewegungsgleichung lautet

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = \alpha\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,, \quad \alpha = -\gamma\,Mm\,. \tag{4}$$

Aufgrund der wirkenden konservativen Zentralkraft gelten Energieerhaltung und Drehimpulserhaltung ($\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$).

(a) Der Lenz'sche Vektor ist gegeben durch

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} + m\alpha\,\frac{\mathbf{r}}{r}\,. \tag{5}$$

Beweisen Sie, dass dieser Vektor für das Kepler-Problem tatsächlich eine Konstante der Bewegung ist ($\dot{\mathbf{A}} =?$). Benutzen Sie hierzu (4) und den Entwicklungssatz $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \equiv (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$. Zeigen Sie zudem, dass $(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}) = r\,\dot{r}$.

(b) Welche geometrische Gestalt haben die geschlossenen Bahnkurven des Kepler-Problems? Bestimmen Sie mit $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ die Lage des Lenz'schen Vektors relativ zu dieser Bahn. Betrachten Sie hierzu Bahnpunkte mit $(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) = 0$. Diese Punkte weisen eine minimale/maximale Entfernung vom Brennpunkt auf. Was gilt für die zugehörigen Vektoren? Machen Sie mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen eine Aussage über den Lenz'schen Vektor für eine Kreisbahn.

(c) Durch Skalarmultiplikation von $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{r}$ können Sie sehr leicht die allgemeine Bahnkurve berechnen. Bestätigen Sie damit Ihre Behauptung aus (b). Bestimmen Sie weiterhin ϵ und p aus Gleichung (1).