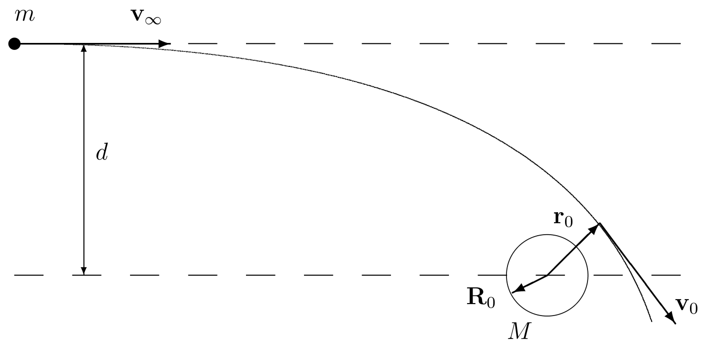
Übungen zur Vorlesung **WS 2014/15**
Theoretische Physik LA 1: **Blatt 5**
Mechanik/Quantenmechanik Ausgabedatum: 20.11.2014

Aufgabe 12 (Schriftlich) Erhaltungssätze 6 Punkte

Ein Meteor der Masse m nähert sich der Erde (Masse M, Radius R_0) aus dem Unendlichen kommend mit der Geschwindigkeit v_∞ und würde bei fehlender Erdanziehungskraft im Abstand $d \gg R_0$ an der Erde vorbeifliegen. Aufgrund der Gravitationskraft ist seine Bahn jedoch zur Erde hin gekrümmt. Berechnen Sie *nur unter Verwendung von Erhaltungssätzen* den minimalen Abstand r_0 des Meteors von der Erde und seine Geschwindigkeit v_0 in diesem Punkt. Wie sind die Parameter d und v_∞ zu wählen, damit der Meteor an der Erde vorbeifliegt?



Aufgabe 13 (Votier) Gedämpfter harmonischer Oszillator 2 Punkte

Mit der Federkraft $F_1 = -Dx$ ergibt sich für den eindimensionalen *ungedämpften* harmonischen Oszillator folgende Differenzialgleichung:

$$\ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0\,. \tag{1}$$

Wir wollen nun eine Reibungskraft F_2 berücksichtigen, die entgegen der Bewegungsrichtung des schwingenden Körpers wirkt. Diese habe die Form $F_2 = -2\gamma m\,\dot{x}$, wobei $\gamma > 0$ sei. Für den eindimensionalen *gedämpften* harmonischen Oszillator folgt somit:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0\,. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$x(t) = \tilde{x}\,e^{i\omega_0 t}$$

eine Lösung der Differenzialgleichung (1) darstellt ($\tilde{x}$=konst.). Das System schwingt demnach mit der Eigenfrequenz ω_0. Geben Sie diese an. (1 Punkt)

(b) Benutzen Sie für die Differenzialgleichung (2) den Ansatz

$$x(t) = \tilde{x}\,e^{\lambda t}\,. \tag{3}$$

Bestimmen Sie λ. Das Verhältnis der Größen γ und ω_0 legt hierbei fest, ob die Lösungen reell oder komplex sind. (1 Punkt)

Aufgabe 14 Gedämpfter harmonischer Oszillator **Vortragsübung**

Im Folgenden untersuchen Sie die Lösungen der Oszillatorgleichung (2) für unterschiedlich starke Dämpfungen.

(a) **Schwache Dämpfung:**
Zeigen Sie, dass für $\gamma < \omega_0$ Gleichung (2) mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = 0$$

durch

$$x(t) = x_0\, e^{-\gamma t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega} \sin(\omega t)\right)$$

gelöst wird. Ermitteln Sie ω und skizzieren Sie $x(t)$.

(b) **Starke Dämpfung:**
Zeigen Sie, dass für $\gamma > \omega_0$ die allgemeine Lösung von Gleichung (2) durch

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t}\right)$$

gegeben ist und ermitteln Sie β. Es gelten die Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = v_0\,.$$

Beweisen Sie, dass sich daraus die spezielle Lösung

$$x(t) = \frac{v_0}{\beta}\, e^{-\gamma t} \sinh(\beta t)$$

ergibt. Skizzieren Sie $x(t)$.

(c) **Aperiodischer Grenzfall:**
Zeigen Sie, dass für $\gamma = \omega_0$ aus dem Ansatz (3) $\lambda = -\gamma$ folgt. Gleichung (2) ist eine Differenzialgleichung 2. Ordnung, es sollten daher zwei Integrationskonstanten zu bestimmen sein. Ermitteln Sie eine weitere Lösung, indem Sie den Vorfaktor $\tilde{x}$ nun als zeitabhängig annehmen: $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$. Weisen Sie nach, dass $\ddot{\tilde{x}}(t) = 0$, also $\tilde{x} = c_1 t + c_2$ sein muss. Benutzen Sie dies, um aus den Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = v_0$$

die Lösung

$$x(t) = v_0\, t\, e^{-\gamma t}$$

zu erhalten. Skizzieren Sie $x(t)$ im Falle dieser kritischen Dämpfung. Worin besteht der wesentliche Unterschied zur starken Dämpfung?