Übungen zur Vorlesung **WS 2014/15**
Theoretische Physik LA 1: **Blatt 6**
Mechanik/Quantenmechanik Ausgabedatum: 27.11.2014

Aufgabe 15 (Schriftlich) Erzwungene Schwingung und Resonanz 10 Punkte

In den Aufgaben 13 und 14 haben Sie den eindimensionalen gedämpften harmonischen Oszillator kennengelernt. Die Differenzialgleichung lautete:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0\,.$$

Nun werde das System durch eine äußere Kraft $F_{\mathrm{a}}(t) = F_0\,\cos(\omega_{\mathrm{a}}t)$ angetrieben. Die zugehörige Bewegungsgleichung ist demnach:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \frac{D}{m}x = \frac{F_0}{m}\,\cos(\omega_{\mathrm{a}}t)\,. \tag{1}$$

Nach dem Einschwingvorgang schwingt das angeregte System mit der von außen vorgegebenen Frequenz ω_{a}, d.h.

$$x(t) = X(\omega_{\mathrm{a}})\,\cos(\omega_{\mathrm{a}}t + \phi(\omega_{\mathrm{a}})) \tag{2}$$

stellt eine Lösung dar.

(a) Ermitteln Sie $X(\omega_{\mathrm{a}})$ und $\phi(\omega_{\mathrm{a}})$. Setzen Sie hierzu den Ansatz (2) in Gleichung (1) ein. Benutzen Sie Additionstheoreme für $\cos(\omega_{\mathrm{a}}t + \phi)$ und $\sin(\omega_{\mathrm{a}}t + \phi)$. Wieso müssen die Koeffizienten vor $\cos(\omega_{\mathrm{a}}t)$ und $\sin(\omega_{\mathrm{a}}t)$ verschwinden? Mit Hilfe der Bedingung, dass der Koeffizient vor $\sin(\omega_{\mathrm{a}}t)$ verschwinden muss, können Sie $\tan\phi$ bestimmen. Benutzen Sie $L(\omega_{\mathrm{a}}) = \sqrt{(2\gamma\omega_{\mathrm{a}})^2 + (\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{a}}^2)^2}$, um damit $\sin\phi$ und $\cos\phi$ anzugeben. (6 Punkte)

(b) Wie hängt die Amplitude von der Frequenz ω_{a} ab? Was geschieht, wenn bei verschwindender Dämpfung die von außen vorgegebene Frequenz mit ω_0 übereinstimmt? Skizzieren Sie $X(\omega_{\mathrm{a}})$. (2 Punkte)

(c) Wie hängt die Phasenverschiebung von der Frequenz ω_{a} ab? Skizzieren und interpretieren Sie $\phi(\omega_{\mathrm{a}})$. (2 Punkte)

Aufgabe 16 (Votier) Mathematisches Pendel 12 Punkte

Eine punktförmige Masse m hängt an einem masselosen Stab der Länge l von der Decke eines Zimmers. Auf m wirkt die Gravitationskraft $-mg\,\mathbf{e}_y$. Die Lage der Masse soll durch den Winkel $\varphi(t)$ in der x-y-Ebene beschrieben werden. Hierbei sei die Gleichgewichtslage bei $\varphi = 0$. Wählen Sie als Koordinatenursprung den Punkt, an dem das Pendel an der Decke befestigt ist.

(a) Fertigen Sie eine Skizze an. Wie lautet der Ortsvektor $\mathbf{x}(l,\varphi) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y = l\mathbf{e}_l$ der Masse m? (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie den zu $\mathbf{e}_l$ orthogonalen Vektor $\mathbf{e}_\varphi$, sowie die zeitlichen Ableitungen $\dot{\mathbf{x}}$ und $\ddot{\mathbf{x}}$. (2 Punkte)

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf. Multiplizieren Sie diese mit $\mathbf{e}_\varphi$, da Sie an der Bewegung in φ-Richtung interessiert sind. Zeigen Sie, dass daraus folgt:

$$l\ddot{\varphi} = -g \sin\varphi \,. \qquad \text{(2 Punkte)}$$

(d) Für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage gilt $\sin\varphi(t) \approx \varphi(t)$. Benutzen Sie diese Näherung im Folgenden. Geben Sie die allgemeine reelle Lösung der zugehörigen Differenzialgleichung an. Welche Beziehung zu Gleichung (1) in Aufgabe 13 besteht? Mit welcher Frequenz schwingt das Pendel? (2 Punkte)

(e) Ein solches Pendel werde zum Zeitpunkt $t = 0$ um φ_0 ausgelenkt und starte dort mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit. Geben Sie $\varphi(t)$ an. Skizzieren Sie die Bahnkurve in einem t-φ-Diagramm. (2 Punkte)

(f) Skizzieren Sie die Bahnkurve in einem φ-$\dot{\varphi}$-Diagramm. Welche Trajektorie erhalten Sie damit im Phasenraum? Zeichnen Sie den zu $t = 0$ gehörigen Punkt ein. Überlegen Sie sich, wie die Kurve durchlaufen wird und wo sich das Pendel dabei im Ortsraum befindet. (2 Punkte)

Aufgabe 17 Streuung zweier Teilchen — Vortragsübung

Zwischen zwei Teilchen bestehe eine kurz reichende Wechselwirkung. In großem Abstand zueinander sei daher eine kräftefreie Bewegung möglich. Der Anfangsimpuls des Teilchens eins mit der Masse m_1 sei $\mathbf{p}_1$. Teilchen zwei besitze die Masse m_2 und den Impuls $\mathbf{p}_2$. Die Endimpulse nach dem Stoß seien $\mathbf{p}_1'$ und $\mathbf{p}_2'$. Unter Verwendung der Impulserhaltung und der Energieerhaltung ist es nun möglich, allgemeine Aussagen über die Endimpulse zu treffen, ohne die Wechselwirkung im Detail zu kennen. Im Folgenden werden Sie zwei Spezialfälle in zwei Dimensionen betrachten.

(a) Das erste Teilchen nähere sich auf der x-Achse mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ dem bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ruhenden zweiten Teilchen. Des Weiteren seien die beiden Massen identisch. Welche Bedingungen stellen die Erhaltungssätze an die Winkel, unter denen die Teilchen die x-Achse verlassen können? Nehmen Sie den Fall identischer Winkel an. Was geschieht, wenn kinetische Energie beim Stoß in innere Energie verwandelt wird?

(b) Bei den beiden Teilchen handele es sich nun um Billardkugeln mit der Masse m und dem Radius r. Die zweite Kugel ruhe bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Die erste Kugel bewege sich zunächst mit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$. Die Bahn ihres Mittelpunktes sei bis zum Stoß jetzt aber eine Parallele zur x-Achse im Abstand a. Was können Sie über die Bewegungen der Kugeln (unter Vernachlässigung von Reibungseffekten beim Stoß) aussagen?