Übungen zur Vorlesung **WS 2014/15**
Theoretische Physik LA 1: **Blatt 7**
Mechanik/Quantenmechanik Ausgabedatum: 04.12.2014

Aufgabe 18 (Schriftlich) Dyadische Produkte — 7 Punkte

Die Matrix

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_m \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_m \end{bmatrix}$$

wird als dyadisches Produkt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}) = v_b \boldsymbol{a}.$$

D.h. multipliziert man das dyadische Produkt $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ mit einem Vektor $\boldsymbol{v}$, erhält man einen Vektor parallel zu $\boldsymbol{a}$. Dabei ist v_b das innere Produkt von $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{v}$. (1 Punkt)

(b) Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})$? (1 Punkt)

(c) In der Vorlesung wurde die Zentrifugalkraft in folgender Weise angegeben:

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{Z} = m\omega^2 (1 - \hat{\omega} \otimes \hat{\omega})\boldsymbol{r}\,. \tag{3.181}$$

Untersuchen Sie das dyadische Produkt $\hat{\boldsymbol{n}} \otimes \hat{\boldsymbol{n}}$, wobei $\hat{\boldsymbol{n}}$ ein Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$ ist. Wie lautet die Spur dieser Matrix? Was gilt hier für die Eigenwerte und Eigenvektoren? Wie ist die Wirkung von $\hat{\boldsymbol{n}} \otimes \hat{\boldsymbol{n}}$ auf einen Vektor $\boldsymbol{a}$? Berechnen Sie $(\hat{\boldsymbol{n}} \otimes \hat{\boldsymbol{n}})^k \boldsymbol{a}$. Wohin zeigt der Vektor $(1 - \hat{\boldsymbol{n}} \otimes \hat{\boldsymbol{n}})\boldsymbol{a}$? (5 Punkte)

Aufgabe 19 (Votier) Ostabweichung beim freien Fall — 11 Punkte

Wir betrachten ein Koordinatensystem, das bei einer geographischen Breite φ fest mit der rotierenden Erde verbunden ist. Die x-Richtung zeige dabei nach Süden, die y-Richtung nach Osten, und die z-Richtung nach oben (in Radialrichtung der Erde).

(a) Fertigen Sie eine Skizze an. Stellen Sie in diesem beschleunigten Koordinatensystem die Bewegungsgleichung (3.179) eines Massenpunktes im Gravitationsfeld auf. Welche Scheinkräfte treten auf? (3 Punkte)

(b) Wie groß ist die Zentrifugalkraft im Vergleich zur Gravitationskraft, und in welche Richtung zeigt sie? Der Erdradius beträgt ungefähr 6370 km. Ist die Zentrifugalkraft stets antiparallel zur Gravitationskraft? Was bedeutet dies für einen auf der Erde stehenden Menschen? (3 Punkte)

(c) Im Folgenden sei die Zentrifugalkraft in die Gravitationskraft absorbiert. In anderen Worten: senkrecht heißt nun jene Richtung, in die die Summe von Zentrifugalkraft und Gravitationskraft zeigt. Dies ist die Richtung, welche sich mit Lot oder Wasserwaage bestimmen lässt. Ein Massenpunkt wird von einem senkrechten Turm der Höhe h fallen gelassen ($\dot{\mathbf{r}} \approx \dot{z}\mathbf{e}_z$). Er wird beim Fall von der Coriolis-Kraft abgelenkt. Zeigen Sie, dass für die Abweichung y gilt:

$$y(t) = \frac{1}{3}\omega g \cos\varphi t^3 \, .$$

Um wieviel und in welche Richtung weicht die Bahn von der Senkrechten ab, bis der Massenpunkt aufschlägt? Es sei $h = 100\text{m}$, welche Abweichung würde sich am Äquator bzw. in Stuttgart ergeben?
Hinweise: Setzen Sie eine verschwindende Zentrifugalkraft für die Rechnung an. Die Rotationsachse der Erde lässt sich in eine z- und eine x-Komponente zerlegen. Welche wirkt sich hauptsächlich auf die Bahn aus? Berechnen Sie aus $m\ddot{z} = -mg$ die Fallzeit und integrieren Sie $m\ddot{y} = \dots$, um $y(t)$ zu erhalten. (5 Punkte)

Aufgabe 20 Atwoodsche Fallmaschine — Vortragsübung

Eine Masse m_1 sei mit einer Schnur über eine drehbare Rolle (Radius r) mit einer Masse m_2 verbunden. Die Rolle und die Schnur der Länge L seien masselos, Reibung werde vernachlässigt.

(a) **Lagrange-Gleichungen erster Art:**
Fertigen Sie eine Skizze an. Betrachten Sie nur Bewegungen entlang einer Achse. Wieviele Zwangsbedingungen haben Sie dadurch bereits berücksichtigt? Wieviele Freiheitsgrade bleiben übrig? Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. In welche Richtung zeigen die Zwangskräfte Z_i? Welche Bedingung folgt aufgrund der Verbindung der beiden Massen? Benutzen Sie Gleichung (4.20) der Vorlesung für den dynamischen Fall und identifizieren Sie den Lagrange-Parameter. Wieviele Gleichungen und Unbekannten folgen aus dieser Betrachtungsweise? Lösen Sie das zugehörige Gleichungssystem und interpretieren Sie das Resultat.

(b) **Lagrange-Gleichungen zweiter Art:**
Sie lernen nun die Behandlung desselben Problemes mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen zweiter Art kennen. Formulieren Sie zunächst erneut alle Zwangsbedingungen und führen Sie eine generalisierte Koordinate q ein. Ermitteln Sie die kinetische Energie T und die potenzielle Energie V in Abhängigkeit von q, $\dot{q}$ und t. Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t) := T - V$ auf. Berechnen Sie $\frac{\partial L}{\partial q}$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. Welche Bewegungsgleichung ergibt sich aus der Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad ? \tag{4.34}$$

Lösen Sie diese. Wie können Sie nun die Zwangskräfte ermitteln? Vergleichen Sie die Ergebnisse aus den Teilaufgaben (a) und (b).