Übungen zur Vorlesung | **WS 2014/15**
Theoretische Physik LA 1: | **Blatt 8**
Mechanik/Quantenmechanik | Ausgabedatum: 11.12.2011

Aufgabe 21 (Schriftlich) Elektromagnetisches Feld — 10 Punkte

Gegeben sei folgende Lagrange-Funktion mit einem geschwindigkeitsabhängigen Potenzial:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + e\,\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - e\,\phi(\mathbf{x}, t)\,.$$

Hierbei gelte $\mathbf{x} = x_i\,\mathbf{e}_i$ und

$$\mathbf{E} := -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{B} := \nabla \times \mathbf{A}\,.$$

Geben Sie die zugehörigen Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \tag{4.34}$$

an und identifizieren Sie die Bewegungsgleichungen. Um welches physikalische System handelt es sich?

Hinweise: Berechnen Sie $\dot{A}_i(x_k, t)$, wobei die Zeitableitung auch auf die x_k wirkt. Benutzen Sie den Epsilon-Tensor und beweisen Sie damit, dass $(\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})_i = -\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right)\dot{x}_k$.

Aufgabe 22 (Votier) Perle auf rotierendem Draht — 10 Punkte

Ein Ende eines Drahtes sei im Ursprung des Koordinatensystemes befestigt. Um diesen rotiere der Draht mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω in der x-y-Ebene. Eine Perle der Masse m könne sich entlang des Drahtes reibungsfrei bewegen.

(a) Fertigen Sie eine Skizze an. Wie lauten die Zwangsbedingungen? (2 Punkte)

(b) Es sei $q = r$ der Abstand der Perle zum Koordinatenursprung. Geben Sie die Position der Perle $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ in Abhängigkeit von q, ω und t an. Berechnen Sie $\dot{\mathbf{x}}$. Beachten Sie dabei, dass $q = q(t)$ gilt. (2 Punkte)

(c) Wie lautet die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2$? Die Gravitationskraft wirke in z-Richtung. Demnach sei die potenzielle Energie konstant. Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$ an. (2 Punkte)

(d) Wie lautet die Bewegungsgleichung? Berechnen Sie die allgemeine Lösung $q(t)$. (2 Punkte)

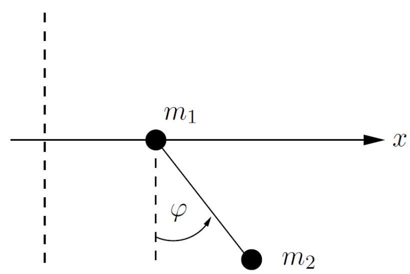
(e) Betrachten Sie zwei Anfangsbedingungen:

- Zum Zeitpunkt $t = 0$ gelte $q(0) = r_0 > 0$ und $\dot{q}(0) = 0$.
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ gelte $q(0) = r_0 > 0$ und $\dot{q}(0) = -r_0\,\omega$.

Bestimmen Sie die Integrationskonstanten für die beiden Fälle und beschreiben Sie die Bewegung der Perle. (2 Punkte)

Aufgabe 23 Gleitpendel **Vortragsübung**

Betrachten Sie ein Pendel der Masse m_2, dessen Aufhängepunkt mit der Masse m_1 sich horizontal frei bewegen kann.



(a) Benutzen Sie die Position der Masse m_1 auf der x-Achse und den Winkel φ als generalisierte Koordinaten. Geben Sie $\mathbf{x}_1(x, \varphi)$, $\mathbf{x}_2(x, \varphi)$, $\dot{\mathbf{x}}_1(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi})$ und $\dot{\mathbf{x}}_2(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi})$ an. Berechnen Sie $\dot{\mathbf{x}}_1^2$ sowie $\dot{\mathbf{x}}_2^2$.

(b) Geben Sie die kinetische Energie T, die potenzielle Energie V und die Lagrange-Funktion $L(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}, t)$ des Systems an.

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. Was gilt für den Gesamt-Impuls p_x in x-Richtung?

(d) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen unter der Annahme $\varphi \ll 1$. Wodurch werden die Integrationskonstanten festgelegt? Was ergibt sich für $m_1 \to \infty$?