Übungen zur Vorlesung **WS 2014/15**
Theoretische Physik LA 1: **Blatt 9**
Mechanik/Quantenmechanik Ausgabedatum: 18.12.2014, Abgabedatum: **8.1.2015**

Aufgabe 24 Eigenschwingungen — Vortragsübung

Drei Teilchen mit derselben Masse bewegen sich in einer Dimension. Teilchen zwei ist mit Teilchen eins und Teilchen drei über je eine Feder mit der Federkonstanten D und der Ruhelänge l_0 verbunden.

(a) Fertigen Sie eine Skizze an. Die Verschiebung des Teilchens i aus seiner Gleichgewichtslage sei x_i. Geben Sie die kinetische Energie T und die potenzielle Energie V an.

(b) Wie lauten die Lagrange-Funktion L und die Lagrange-Gleichungen?

(c) Benutzen Sie für die Bewegungsgleichungen den Ansatz $x_i = c_i \, \mathrm{e}^{i\omega t}$, mit konstanten c_i. Alle Teilchen schwingen somit mit derselben Frequenz ω. Welcher Gleichung muss die entstehende Matrix genügen? Bestimmen Sie damit die Eigenfrequenzen ω_i des Systems.

(d) Wie bewegen sich die Teilchen? Geben Sie die Eigenvektoren an und skizzieren Sie die zugehörigen Eigenmoden. Wie lautet die allgemeine Lösung?

Aufgabe 25 (Schriftlich) Elektromagnetisches Feld — 8 Punkte

Betrachten Sie erneut die Lagrange-Funktion aus Aufgabe 21:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + e\,\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - e\,\phi(\mathbf{x}, t)\,.$$

Berechnen Sie den kanonisch konjugierten Impuls $\mathbf{p}$ mit

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}, \quad k = 1, \ldots, 3$$

sowie die Hamilton-Funktion

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) = p_k \dot{x}_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) - L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t), t)\,.$$

Bestimmen Sie die Hamilton-Gleichungen

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}\,.$$

Anstelle von drei Differenzialgleichungen zweiter Ordnung erhalten Sie nun sechs Differenzialgleichungen erster Ordnung. Zeigen Sie, dass diese beiden Formulierungen äquivalent sind.

Aufgabe 26 (Votier) Trägheitstensor **11 Punkte**

Der Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}$ ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\Theta} = \int d^3\boldsymbol{x}\,\varrho(\boldsymbol{x}) \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & z^2+x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{bmatrix}.$$

In einem aus dem Schwerpunkt um den Vektor $\boldsymbol{a}$ verschobenen, achsenparallelen System gilt nach dem Satz von Steiner

$$\boldsymbol{\Theta}' = \boldsymbol{\Theta} + M\{\boldsymbol{a}^2\mathbf{1} - \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a}\}.$$

(a) Betrachten Sie einen Kreisring mit dem Radius R und der Masse M, der in der x-y-Ebene liegt und dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist. Begründen Sie, dass die Dichte ρ gegeben ist durch

$$\rho(r,\varphi,z) = \delta(z)\delta(r-R)\frac{M}{2\pi R}.$$

Benutzen Sie Zylinderkoordinaten und berechnen Sie $\int \rho\,\mathrm{d}V$, um die Gesamtmasse zu erhalten. (1 Punkt)

(b) Zeigen Sie, dass sich für den Trägheitstensor ergibt

$$\boldsymbol{\Theta} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

und bestimmen Sie α. Begründen Sie das Ergebnis. (3 Punkte)
Hinweise: Benutzen Sie $x = x(R,\varphi)$, $y = y(R,\varphi)$, $z = 0$, $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\sin^2\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\cos^2\varphi = \pi$ und $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\sin\varphi\cos\varphi = 0$.

(c) Der Kreisring wird nun um $R\mathbf{e}_y$ verschoben. Ermitteln Sie mit dem Satz von Steiner den neuen Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}'$ bezüglich des Koordinatenursprungs. (1 Punkt)

(d) Am Kreisring sei zudem an der Stelle $x = y = R$ eine Punktmasse m befestigt. Fertigen Sie eine Skizze an. Wie lautet nun der Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}''$? (2 Punkte)

(e) Zeigen Sie, dass $\mathbf{e}_z$ eine Hauptachse ist und bestimmen Sie das zugehörige Trägheitsmoment. (1 Punkt)

(f) Der Kreisring sei bei $y = 0$ und $y = 2R$ an der y-Achse befestigt und rotiere um diese. Berechnen Sie den Drehimpuls

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\Theta}''\,\boldsymbol{\omega}$$

mit $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_y$ für $t = 0$. Geben Sie mit

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{p} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$$

den Drehimpuls für die Punktmasse bei $t = 0$ an. Vergleichen Sie die Resultate. Ermitteln Sie die Rotationsenergie

$$T_\mathrm{rot} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\Theta}''\,\boldsymbol{\omega}).$$ (3 Punkte)