Übungen zur Vorlesung **WS 2014/15**
Theoretische Physik LA 1: **Blatt 10**
Mechanik/Quantenmechanik Ausgabedatum: 08.01.2015

Aufgabe 27 Wellen — Vortragsübung

Der Welle-Teilchen-Dualismus ist Ihnen bereits aus der Schule bekannt. Im Folgenden lernen Sie Wellengleichungen, deren Lösungen sowie grundlegende Konzepte der Quantenmechanik kennen.

(a) Zeigen Sie, dass jede Funktion der Form $\chi(z,t) = f(z-ct) + g(z+ct)$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0$$

ist. Geben Sie eine geometrische Interpretation für jeden der beiden Lösungsteile.

(b) Spezielle Lösungen der Wellengleichung sind ebene Wellen der Form $\chi_0 e^{i(kz-\omega t)}$, wobei χ_0 eine komplexe Amplitude ist. Zeigen Sie, dass der Realteil und der Imaginärteil davon ebenfalls Lösungen der Wellengleichung sind, und verifizieren Sie durch Einsetzen die Dispersionsrelation $\omega = ck$.

(c) Geben Sie eine geometrisch anschauliche Interpretation für jede der folgenden Größen: Die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ und die dadurch definierte Frequenz ν, die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$, die Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und die dadurch definierte Wellenlänge λ. Verifizieren Sie die Beziehung $\nu\lambda = c$.

(d) In drei Dimensionen sei $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$, wobei $\boldsymbol{k}$ nun ein Wellenvektor ist. Die zugehörige Wellengleichung lautet

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial t^2} - \Delta\boldsymbol{\chi} = 0 \qquad \text{mit} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Δ ist der Laplace-Operator. Berechnen Sie

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}\,, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial t^2}\,, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{\chi}\,, \quad \Delta\boldsymbol{\chi}\,, \quad \nabla\times\boldsymbol{\chi} \quad \text{und} \quad \nabla\otimes\boldsymbol{\chi}\,.$$

Ändert sich die Dispersionsrelation?

(e) Wir definieren nun die Operatoren

$$\hat{E} := i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,, \quad \hat{T} := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \quad \text{und} \quad \hat{\boldsymbol{p}} := -i\hbar\nabla\,,$$

wobei $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Wenden Sie diese auf $\boldsymbol{\chi}$ an. Geben Sie E, T und $\boldsymbol{p}$ mit

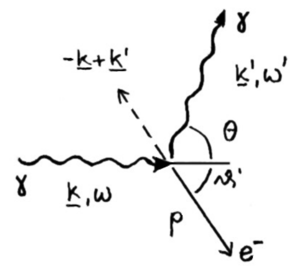
$$\hat{E}\,\boldsymbol{\chi} =: E\,\boldsymbol{\chi}\,, \quad \hat{T}\,\boldsymbol{\chi} =: T\,\boldsymbol{\chi}\,, \quad \hat{\boldsymbol{p}}\,\boldsymbol{\chi} =: \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\chi}$$

sowie $T(\boldsymbol{p})$ an. Welchen physikalischen Größen können Sie die Resultate zuordnen?

(f) Berechnen Sie $(\boldsymbol{x}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})\,\boldsymbol{\chi}$, $(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{\chi}$ und $(\boldsymbol{x}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}-\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{\chi}$. Welcher entscheidende Unterschied zu $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{\chi}$ besteht?

Aufgabe 28 (Schriftlich) Compton-Streuung **7 Punkte**

In gewissen Situationen kann sich Licht der Kreisfrequenz ω wie ein Teilchen mit Energie $\hbar\omega$ und Impuls $\hbar\boldsymbol{k}$ verhalten (siehe Aufgabe 27). So kann es einen Teil seiner Energie und seines Impulses auf ein anfänglich ruhendes Elektron übertragen. Dabei wird es um einen Winkel θ gestreut und ändert seine Frequenz (bzw. Wellenlänge), da ein Teil seiner Energie auf das Elektron übergeht.



(a) Berechnen Sie in Abhängigkeit des beobachteten Streuwinkels θ die Änderung $\Delta\lambda$, welche die Wellenlänge des Lichts bei der Streuung erfährt. Dabei soll der Energie- und der Impulssatz benutzt werden. Es kann angenommen werden, dass die Änderung der Wellenlänge klein ist ($|\boldsymbol{k}| \approx |\boldsymbol{k'}|$), und dass das Elektron nicht-relativistisch behandelt werden kann. (4 Punkte)
Endergebnis: $\Delta\lambda \approx \frac{4\pi\hbar}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

(b) In welchem Winkel und mit welcher Geschwindigkeit wird das Elektron weggestoßen? Für welchen Streuwinkel ist der Impulsübertrag maximal? (3 Punkte)

Aufgabe 29 (Votier) Gott würfelt nicht **4 Punkte**

Der Mittelwert $\langle s \rangle$ einer diskreten Verteilung ist folgendermaßen definiert:

$$\langle s \rangle = \sum_s P(s)s\,.$$

Hierbei sei $P(s)$ die Wahrscheinlichkeit, den Wert s anzutreffen. Mit Hilfe von

$$\left\langle s^2 \right\rangle = \sum_s P(s)s^2$$

lässt sich die Abweichung vom Mittelwert charakterisieren.

(a) Zeigen Sie, dass ganz allgemein gilt

$$\left\langle (s- < s >)^2 \right\rangle = \left\langle s^2 \right\rangle - \langle s \rangle^2 =: \sigma^2\,. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

(b) Betrachten Sie einen sechsseitigen Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(s)$ eine Eins ($s = 1$), eine Zwei ($s = 2$), etc. zu würfeln? Berechnen Sie $\langle s \rangle$, $\left\langle s^2 \right\rangle$ und σ. (2 Punkte)

(c) Welcher Anteil der Würfelresultate liegt im Intervall $\langle s \rangle \pm \sigma$, welcher im Intervall $\langle s \rangle \pm 2\sigma$? (1 Punkt)