Übungen zur Vorlesung **WS 2014/15**
Theoretische Physik LA 1: **Blatt 11**
Mechanik/Quantenmechanik Ausgabedatum: 15.1.2015

Aufgabe 30 (Votier) Teilchen im Kasten — 12 Punkte

Es sei der Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x)$$

mit

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

gegeben.

(a) *Vorabfrage:* Formulieren Sie für $A > 0$ die allgemeinste *reelle* Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, w(x) = -Aw(x)\,. \qquad \text{(2 Punkte)}$$

(b) An welche Bewegungsform aus der Mechanik erinnert Sie dies? (1 Punkt)

(c) Lösen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe (a) die Eigenwertgleichung $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$ für $\hat{V} = 0$ ($E > 0$). (1 Punkt)

(d) Es sei nun

$$\hat{V}(x) = \begin{cases} V_0 & x < 0 \\ 0 & 0 \le x \le a \\ V_0 & x > a \end{cases}.$$

Zeichnen Sie ein $\hat{V}$-x-Diagramm. (1 Punkt)

(e) Dies beschreibt ein Teilchen der Masse m in einem Kastenpotenzial. Nun sei $V_0 = \infty$. Hierdurch ergibt sich, dass

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \phi(x) & 0 < x < a \\ 0 & x \ge a \end{cases}.$$

Ermitteln Sie mit den Randwertbedingungen bei $x = 0$ und bei $x = a$ die stetigen Wellenfunktionen $\psi_k(x)$ und die Energien E_k. Welche Werte nimmt k an? Skizzieren Sie die drei Wellenfunktionen mit der geringsten Energie. (5 Punkte)

(f) Normieren Sie die Wellenfunktionen $\psi_k(x)$, so dass $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k^*(x)\psi_k(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
Hinweis: $\int \mathrm{d}y\ \sin^2 y = \ldots$ (2 Punkte)

Aufgabe 31 (Schriftlich) Momente **8 Punkte**

w sei die Verteilungsfunktion einer kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung ($w(x) \geq 0$, $\int w(x)\,\mathrm{d}x = 1$). Das n-te Moment von w ist definiert durch

$$m_n := \langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n\, w(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\Delta x)^2 := \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = m_2 - m_1^2$. (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie für die Verteilungsfunktion $w_b(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & |x| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die Momente m_n. Was ergibt sich für gerade n, was für ungerade n? Begründen Sie das Ergebnis. Berechnen Sie Δx. (3 Punkte)

(c) Geben Sie für $w_b(x)$ die Schiefe der Verteilung $\langle (\frac{x-m_1}{\Delta x})^3 \rangle$ an. (2 Punkte)

(d) Berechnen Sie für $w_\delta(x) = \delta(x)$ die Momente m_n. (1 Punkt)

Aufgabe 32 Deltadistribution **Vortragsübung**

Die Dirac'sche Deltadistribution $\delta(x)$ ist dadurch definiert, dass $\int f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)$ ist für jede bei 0 stetige Funktion f.

(a) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Deltadistribution:

- $\delta(x) = \delta(-x)$
- $x\delta(x) = 0$
- $\delta(ax) = |a|^{-1}\delta(x)$

(b) Interpretieren Sie $\delta[f(x)]$. Betrachten Sie hierzu $\int g(x)\,\delta[f(x)]\,\mathrm{d}x$. Was erhält man für $\delta(x^2 - a^2)$ und $\delta(\sqrt{x^2 - a^2})$?

(c) Interpretieren Sie die Ableitung der Stufenfunktion θ. Betrachten Sie $\int f(x)\,\theta'(x)\,\mathrm{d}x$ und integrieren Sie partiell.

(d) $\delta(x)$ kann auf verschiedene Weise als Limes geeigneter Funktionenfolgen dargestellt werden. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen gegen $\delta(x)$ konvergieren. Setzen Sie dazu die Funktionen in die definierende Gleichung der Deltadistribution ein.

- $\delta_\epsilon(x) = \frac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2}, \quad \epsilon \to 0^+$
- $\delta_\epsilon(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-\epsilon k^2/2}\, dk, \quad \epsilon \to 0$
- $\delta_L(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-L}^{+L} e^{-ikx}\, dk, \quad L \to \infty$
- $\delta_\epsilon(x) = \frac{\sin(x/\epsilon)}{\pi x}, \quad \epsilon \to 0^+$
- $\delta_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{\pi x^2}(1 - \cos(x/\epsilon)), \quad \epsilon \to 0^+$
- $\delta_\epsilon(x) = \frac{\theta(x+\epsilon)-\theta(x)}{\epsilon}, \quad \epsilon \to 0^+ \qquad \text{mit} \qquad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$