Übungen zur Vorlesung **WS 2014/15**
Theoretische Physik LA 1: **Blatt 12**
Mechanik/Quantenmechanik Ausgabedatum: 22.1.2015

Aufgabe 33 (Votier) Landau-Niveaus — 9 Punkte

Ein geladenes Teilchen bewege sich im Feld $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ mit dem Vektorpotential $\boldsymbol{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)^{\mathrm{T}}$. Ein elektrisches Feld sei nicht vorhanden. Nach Aufgabe 25 ergibt sich somit

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) = \frac{1}{2m} \{\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}\}^2 \,,$$

wobei $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{x}} + e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ der kanonisch konjugierte Impuls ist.

(a) Berechnen Sie $\boldsymbol{B}$. Geben Sie mit Hilfe der Resultate aus Aufgabe 25 die hamiltonschen Bewegungsgleichungen für dieses Feld in kartesischen Koordinaten an. (3 Punkte)

(b) Lösen Sie diese. Welche Bewegung führt das Teilchen aus (klassische Behandlung)? Erinnern Sie sich an Aufgabe 3. Welcher Unterschied besteht? (3 Punkte)

(c) Wenden Sie die Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsbedingung auf geeignete Paare kanonischer Variablen an und geben Sie die quantisierten Energien für das Problem an (Landau-Niveaus). (3 Punkte)

Aufgabe 34 (Schriftlich) Orthogonalisierungsverfahren — 8 Punkte

Zwei Eigenfunktionen ϕ_l und ϕ_m eines Operators $\hat{O}$ seien orthogonal, wenn sie zu verschiedenen Eigenwerten a_l und a_m gehören.

Liegt für einen Eigenwert a_n ein vollständiger Satz linear unabhängiger normierter Eigenfunktionen $\{\phi_{n\nu}\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, f$ vor, so sagt man, der Unterraum von a_n ist f-fach entartet. Aus $\phi_{n\nu}$ kann mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens ein orthonormaler Satz $\{\psi_{n\nu}\}$ konstruiert werden.

(a) Wählen Sie $\psi_{n1} = \phi_{n1}$ und bestimmen Sie eine Linearkombination

$$\psi_{n2} = a\ (\phi_{n2} + b\ \psi_{n1})$$

mit komplexen Koeffizienten, die der Orthonormalitätsforderung und der Normierung genügt. (3 Punkte)

(b) Konstruieren Sie ψ_{n3} als geeignete Linearkombination aus ϕ_{n3}, ψ_{n2} und ψ_{n1}. Wie lautet die allgemeine Rekursionsformel für $\psi_{n\nu}$? (5 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie die abgekürzte Schreibweise für das innere Produkt:

$$\langle f|g\rangle = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\ f^*(\mathbf{r})g(\mathbf{r})\,.$$

Überlegen Sie, welche Rechenregeln für $\langle f|g\rangle$ gelten.

Aufgabe 35 Bra-Ket **Vortragsübung**

In dieser Aufgabe lernen Sie das Rechnen in der Bra-Ket-Schreibweise kennen. Die Kunstwörter Bra und Ket werden für die Bezeichnung von Zustandsvektoren in der Quantenmechanik verwendet. Die Ket-Notation des Vektors $\mathbf{v}$ ist $|v\rangle$, die Bra-Notation $\langle v|$. Das Skalarprodukt eines Bra $\langle n|$ und eines Ket $|m\rangle$ ist gegeben als $\langle n|m\rangle$ (*engl.* bracket). Sind die Vektoren $\mathbf{n}$ und $\mathbf{m}$ orthonormal zueinander, dann gilt $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$.

Zustände eines eindimensionalen Systems seien nun modellhaft durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{N} E_0 |n\rangle\langle n| + \sum_{n=1}^{N} W \{\, |n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n| \,\}$$

beschrieben, wobei die Vektoren $\mathbf{n}$ eine orthonormale Basis bilden. E_0 und W sind Konstanten. Weiterhin sollen periodische Randbedingungen gelten, so dass $|N+n\rangle = |n\rangle$.

Die Operatoren $\hat{b}$ und $\hat{b}^\dagger$ sind definiert über die Beziehungen

$$\hat{b} = \sum_{n=1}^{N} |n\rangle\langle n+1| \qquad \text{und} \qquad \hat{b}^\dagger = \sum_{n=1}^{N} |n+1\rangle\langle n|\,.$$

Untersuchen Sie den Fall $N = 2$. Aufgrund der Randbedingungen ist also $|3\rangle = |1\rangle$. Sie betrachten demnach ein Zwei-Niveau-System, bei dem Übergange von Zustand $|1\rangle$ nach $|2\rangle$ und von $|2\rangle$ nach $|1\rangle$ dieselbe Energie erfordern.

(a) Geben Sie $\hat{H}$, $\hat{b}$ und $\hat{b}^\dagger$ in Abhängigkeit von $|1\rangle$ und $|2\rangle$ an. Welche Beziehung besteht in diesem speziellen Fall zwischen $\hat{b}$ und $\hat{b}^\dagger$?

(b) Welche Resultate ergeben sich für $\hat{b}|1\rangle$ und für $\hat{b}|2\rangle$?

(c) Berechnen Sie $\hat{b}\hat{b}^\dagger$, $\hat{b}^\dagger\hat{b}$ und den Kommutator $\left[\hat{b}, \hat{b}^\dagger\right] := \hat{b}\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b}$.

(d) Zeigen Sie, dass

$$|\mathrm{I}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|1\rangle + |2\rangle\}$$

und

$$|\mathrm{II}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|1\rangle - |2\rangle\}$$

orthonormierte Eigenkets von $\hat{b}$ sind. Geben Sie die Eigenwerte an.

(e) Ermitteln Sie $\hat{b}\hat{H}$, $\hat{H}\hat{b}$ und $\left[\hat{b}, \hat{H}\right]$. Was können Sie nun über die Eigenvektoren von $\hat{b}$ und $\hat{H}$ aussagen?

(f) Berechen Sie $\hat{H}|1\rangle$ und $\hat{H}|2\rangle$, sowie $\hat{H}|\mathrm{I}\rangle$ und $\hat{H}|\mathrm{II}\rangle$. Welche Eigenwerte (Energien) ergeben sich?