Übungen zur Vorlesung **WS 2014/15**
Theoretische Physik LA 1: **Blatt 13**
Mechanik/Quantenmechanik Ausgabedatum: 29.1.2015

Aufgabe 36 (Schriftlich) Endlicher Potenzialtopf **9 Punkte**

In Aufgabe 30 haben Sie ein Teilchen in einem Kastenpotenzial mit unendlich hohen Wänden betrachtet. Im Kasten ergaben sich sinusförmige Lösungen. Außerhalb verschwand die Wellenfunktion. Betrachten Sie nun dasselbe Potenzial mit endlich hohen Wänden:

$$\hat{V}(x) = \begin{cases} V_0 & x < 0 \quad (n = 1) \\ 0 & 0 \le x \le a \quad (n = 2) \\ V_0 & x > a \quad (n = 3) \end{cases} .$$

Die Eigenwertgleichung $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$ mit $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ innerhalb des Kastens bleibt damit unverändert. Die neue Wandhöhe bedingt nun allerdings andere Lösungen.

(a) Begründen und benutzen Sie für die allgemeine Lösung in den drei Bereichen den Ansatz

$$\psi_n(x) = a_n \mathrm{e}^{c_n x} + b_n \mathrm{e}^{-c_n x} .$$

Ermitteln Sie $c_n(V_0, E)$. Untersuchen Sie im Folgenden gebundene Zustände ($V_0 > E > 0$). Zeigen Sie, dass c_2 imaginär ist und dass c_1 und c_3 reell sind. (3 Punkte)

(b) Außerhalb von $0 < x < a$ sind damit exponenziell abklingende und ansteigende Funktionen mögliche Lösungen. Welche Koeffizienten müssen aufgrund der Normierbarkeit der Wellenfunktion verschwinden? (1 Punkt)

(c) Die Gesamtwellenfunktion ergibt sich nun zu

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) & x < 0 \\ \psi_2(x) & 0 < x < a \\ \psi_3(x) & x > a \end{cases} .$$

Bei stetigem $\hat{V}(x)$ oder bei Potenzialen mit endlichen Sprüngen müssen die Gesamtwellenfunktion und ihre räumliche Ableitung stetig sein. Skizzieren Sie damit (ohne zu rechnen) eine mögliche Wellenfunktion. Geben Sie explizit die vier Bedingungen an die Koeffizienten a_n und b_n an, die sich aus den Stetigkeitsbedingungen ergeben. Die zugehörigen Gleichungen werden in der Vorlesung für den symmetrischen Potenzialtopf grafisch gelöst. (3 Punkte)

(d) Erinnern Sie sich an die Lösungen aus Aufgabe 30. Geben Sie diese an und zeigen Sie, dass für unendlich hohe Wände die Gesamtwellenfunktion ebenfalls stetig ist. Gilt dies auch für deren räumliche Ableitung? Begründen Sie dies anhand einer Skizze. Die Ursache hierfür behandeln Sie in der nächsten Aufgabe. (2 Punkte)

Aufgabe 37 (Votier) Delta-Potenzial **8 Punkte**

Untersuchen Sie ein Teilchen der Masse m in einem anziehenden δ-förmigen Potenzial

$$\hat{V}(x) = -\frac{D\hbar^2}{m}\,\delta(x)\,, \quad D > 0\,.$$

(a) Integrieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$ für ein solches Teilchen über ein Intervall $[-\epsilon, \epsilon]$. Betrachten Sie anschließend den Limes $\epsilon \to 0$ und begründen Sie damit, dass die Ableitung der Wellenfunktion bei $x = 0$ einen Sprung um $-2D\psi(0)$ macht. Wie lauten demnach die Anschlussbedingungen der Wellenfunktion an der Stelle $x = 0$? (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie alle gebundenen Zustände des Systems ($E < 0$) und die dazugehörigen Eigenfunktionen. Benutzen Sie hierzu den Ansatz aus Aufgabe 36 (a) für die beiden Bereiche und die Anschlussbedingungen. Achten Sie auf die Normierbarkeit der Gesamtwellenfunktion. Skizzieren Sie diese. Wieviele gebundene Zustände gibt es? (5 Punkte)

Aufgabe 38 Teilchen im periodischen Delta-Potenzial **Vortragsübung**

Das Potenzial aus Aufgabe 37 werde nun periodisch fortgesetzt:

$$\hat{V}(x) = -\frac{D\hbar^2}{m}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\delta(x+\ell a)\,.$$

(a) Betrachten Sie zunächst den Translationsoperator $\hat{T}_a$, der um a translatiert:

$$(\hat{T}_a\Psi)(x) = \Psi(x-a)\,.$$

Zeigen Sie, dass $\hat{T}_a$ mit dem Impulsoperator und mit einem Operator $\hat{B}$ mit $(\hat{B}\Psi)(x) = \beta(x)\Psi(x)$ kommutiert, falls $\beta(x) = \beta(x-a)$. Ist $\hat{T}_a$ unitär? Geben Sie die Eigenwerte und die (nicht-normierbaren) Eigenfunktionen an. Wieso genügt es, diese auf einem Intervall der Länge a zu kennen?

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \hat{V}(x)$ mit $\hat{T}_a$ kommutiert. Die Eigenfunktionen von $\hat{H}$ können damit so gewählt werden, dass sie zugleich Eigenfunktionen von $\hat{T}_a$ sind. Begründen Sie den Lösungsansatz der Form

$$\Psi_K(x+a) = e^{iKa}\Psi_K(x)\,, \quad K \in [-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a})\,.$$

(c) Sei $D < 0$ (abstoßendes Potenzial). Lösen Sie mit obigem Ansatz die zeitunabhängige Schrödingergleichung für ein festes K. Wann existieren solche Lösungen?

(d) Zeigen Sie, dass es Energien E gibt, für die keine Lösungen dieser Form (und somit überhaupt keine Lösungen) existieren. In der Festkörperphysik heißen die Energieintervalle, für die Lösungen existieren, Energiebänder, und jene ohne Lösungen Bandlücken.

(e) Es sei nun $D > 0$ (anziehendes Potenzial). E kann nun positiv oder negativ (siehe Aufgabe 37) sein. Lösen Sie auch für diese beiden Fälle die zeitunabhängige Schrödingergleichung. Was ändert sich gegenüber Teilaufgabe (c)?