Übungen zur Vorlesung **WS 2014/15**
Theoretische Physik LA 1: **Blatt 14**
Mechanik/Quantenmechanik Ausgabedatum: 5.2.2015

Aufgabe 39 (Votier) Observablen — 8 Punkte

Ein quantenmechanisches System besitze genau zwei Energie-Eigenzustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$. Diese seien orthonormiert und vollständig.

(a) Geben Sie $\langle 1|1\rangle$, $\langle 1|2\rangle$, $\langle 2|1\rangle$ und $\langle 2|2\rangle$ an. (1 Punkt)

Des weiteren existiert eine weitere Observable $\hat{A}$. Diese ist also hermitesch:

$$\langle n|\hat{A}|m\rangle = \langle m|\hat{A}|n\rangle^* \,.$$

Die Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ sind aber nicht notwendigerweise Eigenzustände zu $\hat{A}$, d.h. es gilt

$$\hat{A}|1\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle \,,$$

$$\hat{A}|2\rangle = \gamma|1\rangle + \delta|2\rangle \,.$$

(b) Durch Messungen konnten $\langle 2|\hat{A}|2\rangle = 1/2$ und $\langle 2|\hat{A}^2|2\rangle = 1/4$ bestimmt werden. Geben Sie γ und δ an. Berechnen Sie hierzu $\hat{A}|2\rangle$, $\langle 2|\hat{A}|2\rangle$, $\langle 2|\hat{A}|1\rangle = \langle 1|\hat{A}|2\rangle^*$, $\hat{A}\hat{A}|2\rangle$ und $\langle 2|\hat{A}\hat{A}|2\rangle$. (4 Punkte)

(c) Weitere Messungen ergaben $\langle 1|\hat{A}|1\rangle = 1/2$ und $\langle 1|\hat{A}^2|1\rangle = 1/8$. Versuchen Sie, α und β zu ermitteln. Würden Sie diesen Messdaten vertrauen? (3 Punkte)

Aufgabe 40 Kommutatorrelationen der Drehimpulsoperatoren — Vortragsübung

Der quantenmechanische Drehimpuls ist definiert als $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$. Überzeugen Sie sich von der Gültigkeit der folgenden Relationen:

$$[L_i, x_j] = i\hbar \sum_m \epsilon_{ijm} x_m \,, \qquad [L_i, \mathbf{r}^2] = 0 \,,$$

$$[L_i, p_j] = i\hbar \sum_m \epsilon_{ijm} p_m \,, \qquad [L_i, \mathbf{p}^2] = 0 \,,$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \,, \qquad [L_i, \mathbf{L}^2] = 0 \,.$$

Anmerkung: ϵ_{ijk} ist der total antisymmetrische Tensor, für welchen gilt:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{falls (ijk) zyklisch aus } (1,2,3), \\ -1, & \text{falls (ijk) antizyklisch aus } (1,2,3), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$