4.1.2. Generalisierte Koordinaten

- Sind $f = 3n - r$ unabhängige Koordinaten $\{q_1, \dots, q_f\}$, welche die Zwangsbedingungen bereits berücksichtigen.

- zB. $\{\varphi\}$ beim starren Pendel, $\{u_1, u_2\}$ bei Bewegung auf einer Fläche, bei Sphäre S^2 $u_1 = \vartheta$, $u_2 = \varphi$

- Umrechnung in (z.B. kartesische) Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} \underline{r}_1 &= \underline{r}_1(q_1 \dots q_f; t) \\ \underline{r}_2 &= \underline{r}_2(q_1 \dots q_f; t) \\ &\vdots \\ \underline{r}_n &= \underline{r}_n(q_1 \dots q_f; t) \end{aligned}\right\} (4.9) \qquad \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3n}$$

4.1.3. Newtonsche Bewegungsgleichungen bei Zwangsbedingungen

- Zwar gilt weiter

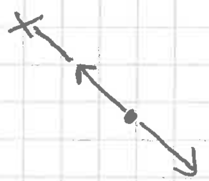
$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

- Aber genauer

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{K}_i + \underline{Z}_i \, , \quad i = 1, \dots, n \qquad (4.10)$$

$\underline{K}_i$: „Eingeprägte Kraft" (Summe aus inneren und äußeren Kräften)

$\underline{Z}_i$: „Zwangskraft", z.B. Fadenspannung beim Pendel, welche die geometrische Einschränkung der Bewegung bewirkt:



- Die Wirkungen der Zwangskräfte, d.h. die Einhaltung der Nebenbedingungen, sind bekannt. Die Zwangskräfte $\underline{Z}_i$ sind im Allgemeinen aber unbekannt.

4.1.4. Ziele

i) Zahl der Freiheitsgrade f bestimmen und optimal angepasste generalisierte Koordinaten finden.

ii) Prinzipien aufstellen, nach denen Bewegungsgleichungen direkt in generalisierten Koordinaten formuliert werden können.

iii) Einfache Verfahren zur Berechnung von Gleichgewichtslagen und Zwangskräften finden.

- Etappe: d'Alembertsches Prinzip

4.2. Das d'Alembertsche Prinzip

- Gegeben: n Massenpunkte $\{m_i\}$ mit Koordinaten $\{\underline{r}_i\}$, welche den Zwangsbedingungen

$$F^l(\underline{r}_1, \dots \underline{r}_n; t) = 0 \qquad (4.1)$$

oder $\underline{\omega}_i^l \cdot d\underline{r}_i + \underline{\omega}_t^l \cdot dt = 0 \qquad (4.7)$

unterworfen sind.

4.2.1. Virtuelle Verrückungen

- Eine virtuelle Verrückung ist eine „infinitesimale" Änderung $\underline{r}_i \longrightarrow \underline{r}_i + \delta\underline{r}_i$ der Koordinaten, die

i) am System zu einem festen Zeitpunkt ausgeführt wird und

ii) mit den Zwangsbedingungen verträglich ist, d.h. mit (4.6):

$$\left.\begin{aligned} \nabla_i f^l(\underline{r}_1, \dots \underline{r}_n; t) \cdot \delta \underline{r}_i &= 0 \\ \underline{\omega}_i^l \cdot \delta \underline{r}_i &= 0, \quad l = 1, \dots, r \end{aligned}\right\} \quad (4.11)$$

• Die Mechanik wird ergänzt durch das Postulat:

4.2.2. Forderung von d'Alembert

• Die virtuelle Gesamtarbeit der Zwangskräfte verschwindet.

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{Z}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \qquad (4.12)$$

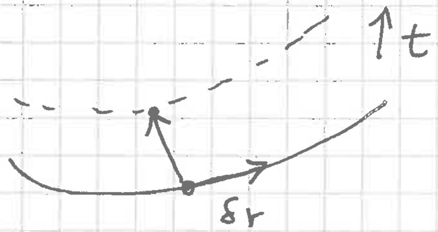
oder mit (4.10)

$$\sum_{i=1}^{n} (\dot{\underline{p}}_i - \underline{k}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \qquad (4.13)$$

bzw. im statischen Fall:

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{k}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \qquad (4.14)$$

< „Die echte Arbeit der Zwangskräfte muss aber nicht verschwinden":



(4.15)

>

• Postulat ist nicht aus den newtonschen Axiomen ableitbar, Zusatzannahme in der Mechanik.

4.3. Die lagrangeschen Gleichungen

4.3.1. Erster Art für die Statik

- Schreibe hier der Einfachheit halber die Koordinaten als $\{x_1, \dots x_{3n}\}$, die Impulse als $\{p_1, \dots p_{3n}\}$, die eingeprägten und Zwangskräfte als $\{K_1, \dots, K_{3n}\}$, bzw. $\{Z_1, \dots, Z_{3n}\}$

- Im Gleichgewicht gilt:

$$K_k(x_1, \dots, x_{3n}) + Z_k(x_1, \dots, x_{3n}) = 0, \quad k = 1, \dots, 3n \qquad (4.16)$$

- Deshalb verschwindet die gesamte virtuelle Arbeit

$$\delta A = \sum_k \{K_k + Z_k\} \cdot \delta x_k = 0 \qquad (4.17)$$

und wegen d'Alembert

$$\sum_k Z_k \delta x_k = 0 \text{ ist auch } \sum_k K_k \delta x_k = 0 \qquad (4.18)$$

- Es gelten die (holonomen oder anholonomen) Zwangsbedingungen (4.7) oder (4.8) und daher nach (4.11)

$$\sum_k \omega_k^l \delta x_k = 0 \quad l = 1, \dots, r \qquad (4.19)$$

- (4.18) ist differenzielles Variationsproblem unter Nebenbedingungen (4.19)

- Füge die Nebenbedingungen (4.19) über Lagrange-Parameter $\lambda_l(x_1, \dots, x_{3n})$, $l = 1, \dots, r$ bei

$$\sum_{k=1}^{3n} \{K_k + \sum_{l=1}^{r} \lambda_l \omega_k^l\} \delta x_k = 0 \qquad (4.20)$$

- Wegen (4.19) lassen sich $\{\delta x_1, \dots, \delta x_r\}$ ausdrücken durch $\{\delta x_{r+1}, \dots, \delta x_{3n}\}$. Letztere sind dann frei variierbar.

- Folgt:

$$\sum_{k=1}^{r} \{K_k + \sum_{l=1}^{r} \lambda_l \omega_k^l\} \delta x_k + \sum_{k=r+1}^{3n} \{K_k + \sum_{l=1}^{r} \lambda_l \omega_k^l\} \cdot \delta x_k = 0 \qquad (4.21)$$

- Berechne $\lambda_l(x_1, \dots x_{3n})$ aus der Forderung

$$K_k + \sum_{l=1}^{r} \lambda_l \omega_k^l = 0 \quad , \; k = 1, \dots, r \qquad (4.22)$$

- Lineares Gleichungssystem für jeden Punkt $x_1, \dots x_{3n}, t$, dann muss dies wegen der freien Variierbarkeit von δx_k auch für $k = r+1, \dots, 3n$ gelten.

- Sind λ_k berechnet, so liefern die Gleichungen (4.22) für $k = 1, \dots, r, r+1, \dots, 3n$ die Beziehungen zwischen eingeprägten Kräften und Gleichgewichtslagen.

- Die Zwangskräfte ergeben sich nach (4.17) und (4.20) zu

$$Z_k = \sum_{l=1}^{r} \lambda_l \omega_k^l \qquad (4.23)$$

- Verfahren verallgemeinerbar auf Dynamik, indem man

K_k in (4.16), (4.17) und (4.18) ersetzt durch

$$K_k - \dot{p}_k = K_k - m_k \ddot{x}_k$$

- Besser:

4.3.2. Berücksichtigung der Zwangsbedingungen durch generalisierte Koordinaten

- Kehre zurück zu (4.9), d.h.

$$\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots q_f; t) \quad , i=1,\dots,n; \; f = 3n-r$$

- d'Alembert (4.13)

$$\sum_{i=1}^{n} (\dot{\underline{p}}_i - \underline{K}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \qquad (4.16)$$

- Nebenrechnungen:

$$\underline{v}_i \underset{\frac{d}{dt}\underline{r}_i}{=} \dot{\underline{r}}_i \overset{KR}{=} \sum_k \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} = \underline{v}_i(q_1, \dots q_f; \dot{q}_1, \dots \dot{q}_f; t) \qquad (4.17)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \qquad (4.18) \quad \text{Identifikation KT}$$

$$\delta \underline{r}_i \overset{KT}{=} \sum_k \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \qquad (4.19) \quad \text{Keine Zeitableitung!}$$

- Folgt: $\sum_i \underline{K}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_k Q_k \, \delta q_k \qquad (4.20)$

mit den „generalisierten" oder „verallgemeinerten" Kräften

$$Q_k \overset{KT}{:=} \sum_i \underline{K}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \qquad (4.21)$$

- NB! Sind Projektoren von $\underline{K} := [\underline{K}_1, \dots \underline{K}_n]$ auf die Koordinatenbasis $\left[\frac{\partial \underline{r}_1}{\partial q_k}, \dots, \frac{\partial \underline{r}_n}{\partial q_k}\right] \qquad (4.22)$

- Folgt ferner:

$$\sum \dot{\underline{p}}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i \underset{KT}{\overset{(4.19)}{=}} \sum_{i,k} m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \qquad (4.23)$$