

$$\sum_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \stackrel{PR}{=} \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left[\dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right] - \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right\} \quad (4.24)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \stackrel{\leftarrow}{=} \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial q_k} \quad (4.25)$$

• Zusammenfassung:

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \stackrel{(4.24)}{=} \sum_i m_i \frac{d}{dt} \left\{ \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right\} - \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_k} \stackrel{(4.18)}{=} \sum_i m_i \frac{d}{dt} \left\{ \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right\} - \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_k} \quad (4.26)$$

• NB! $v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial s}$ für $s = q_k, \dot{q}_k$ (4.27)

• Also:

$$\sum_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i = \sum_{i,k} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{m_i}{2} v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{m_i}{2} v_i^2 \right) \right\} \delta q_k \quad (4.28)$$

(4.21) und (4.28) in (4.13) eingesetzt, mit kinetischer Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \quad (3.24)$$

und der Tatsache, dass δq_k unabhängig voneinander variierbar sind, ergibt die d'Alembert-Gleichungen in generalisierten Koordinaten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k=1, \dots, f \quad (4.29)$$

22.11

• NB! Projektion von $\sum [\dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n] = [k_1, \dots, k_n]$ auf die Koordinatenbasis $\left[\frac{\partial r_1}{\partial q_k}, \dots, \frac{\partial r_n}{\partial q_k} \right]!$

4.3.3. Die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art

- Seien \underline{k}_i konservative Kräfte, d.h.

$$\underline{k}_i = -\nabla_i V$$

- Dann folgt für die verallgemeinerten Kräfte:

$$\begin{aligned} Q_k &\stackrel{(4.21)}{=} \sum_i \underline{k}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} = -\nabla_i V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n) \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial q_k} V(q_1, \dots, q_f, t) \quad (4.30) \end{aligned}$$

wobei

$$V(q_1, \dots, q_f, t) = V(\underline{r}_1(q_1, \dots, q_f, t), \underline{r}_2(q_1, \dots, q_f, t), \dots, \underline{r}_n(q_1, \dots, q_f, t)) \quad (4.31)$$

- Folgt aus (3.24):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0 \quad (4.32)$$

- Da V nicht von \dot{q}_k abhängt, definiere die Lagrangefunktion

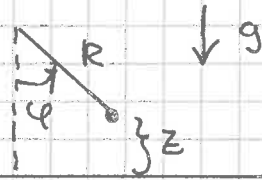
$$\boxed{L = T - V} \quad (4.33)$$

- Damit lauten die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f \quad (4.34)$$

4.3.4 Einfaches Beispiel

- Teilchen auf Kreis im Schwerfeld



(4.35)

$$\cdot v = R\dot{\varphi}, \quad T = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2, \quad V = mgz = mgR(1 - \cos\varphi)$$

$$L = T - V = mR^2 \left\{ \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{R} (1 - \cos\varphi) \right\} \quad (4.36)$$

• Bewegungsgleichung:

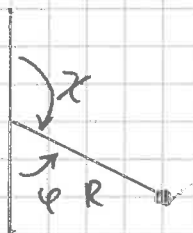
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = mR^2 \left(-\frac{g}{R} \right) \sin\varphi$$

$$(4.34) \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{R} \sin\varphi \quad (4.37)$$

a) Pendelgleichung linearisiert:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R} \varphi =: -\omega^2 \varphi \quad \varphi(t) = A \sin(\omega t + \chi)$$

b) Kriechbahn



(4.34) äquivalent zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \ddot{\varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (4.38)$$

• Bewegungsgleichung eines Teilchens im konservativen Kraftfeld, also ist $E = T + V$ eine Erhaltungsgröße (3.32)

$$\cdot \text{Kriechbahn } E = V(\varphi = \pi) = 2mgR$$

• Messe den Winkel vom Überschlagspunkt aus: $\chi := \varphi - \pi, \quad \dot{\chi} = \dot{\varphi}$

$$\cdot \text{Folgt: } 2mgR = mR^2 \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 + mgR(1 + \cos\chi) \quad (4.39)$$

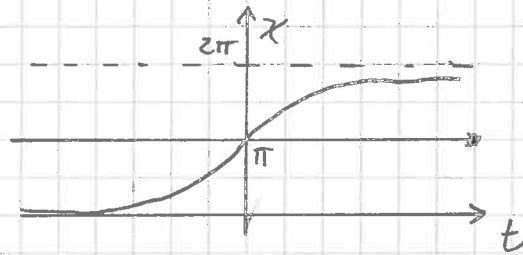
$$\dot{\chi}^2 = 2\omega^2 (1 - \cos\chi), \quad \omega^2 = \frac{g}{R}$$

$$\int_{t_0}^t dt' = \frac{1}{\omega\sqrt{2}} \int_{\chi_0}^{\chi} \frac{d\chi'}{\sqrt{1-\cos\chi'}} = \frac{1}{2\omega} \int_{\chi_0}^{\chi} \frac{d\chi'}{\sin\frac{\chi'}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_{\chi_0/2}^{\chi/2} \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{\omega} \left\{ \ln \tan \frac{\chi}{4} - \ln \tan \frac{\chi_0}{4} \right\} \quad (4.40)$$

- Wähle $\chi_0 = \pi$, $t_0 = 0$, so ist

$$\chi(t) = 4 \arctan e^{\omega t} \quad \text{Soliton-Lösung} \quad (4.41)$$



4.4. Integrale Variationsprinzipien und Lagrangegleichungen

- Bisher: Differentialgleichungen aus lokalen oder differenziellen Variationsprinzipien erstellt, jetzt:

4.4.1. Integrale Variationsprinzipien

a) Vorbemerkungen

- Gibt es ein „Fermatsches Prinzip“ (Lichtstrahlen suchen kürzesten oder längsten Weg zwischen Quelle und Nachweisort) für Bahnen von Teilchen?
- D.h. gibt es eine Abbildung

$$I: F = \{ \text{Menge der Bahnen } [t_1, t_2] \xrightarrow{q} \mathbb{R}^f \text{ mit festem Anfangs- und Endpunkt } q(t_1) =: a, q(t_2) =: b \} \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.42)$$

- derart, dass die tatsächlich durchlaufener Bahnen ein Extremum bilden?

< Bsp: Geodäten im Konfigurationsraum bezüglich eines zu bestimmenden Maßes? Dazu:

b) Zur Variationsrechnung

• Gegeben: $y(x) \in F =$ Raum von reellen Funktionen einer reellen Variablen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mindestens zweimal stetig differenzierbar,

$y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$ fest.

• F ist ein unendlich dimensionaler Vektorraum

• Gegeben ferner: Abbildung

$$I: F \rightarrow \mathbb{R} \tag{4.43}$$
$$y \mapsto I[y]$$

welche jeder Funktion eine reelle Zahl zuordnet ("Funktional")

• Sei speziell

$$I[y] := \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x), y'(x), x) \tag{4.44}$$

mit dem "Integralkern" f

• Gesucht: Diejenige Funktion y , für welche I "stationär" wird, d.h. bei Variation von y I in linearer Näherung verschwindet.

• Vgl für reelle differenzierbare Funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x)$

$$g(x+\eta) - g(x) \stackrel{\text{l.N.}}{=} g'(x) \eta = 0$$

$$\text{oder } dg = g'(x) dx = 0 \tag{4.45}$$

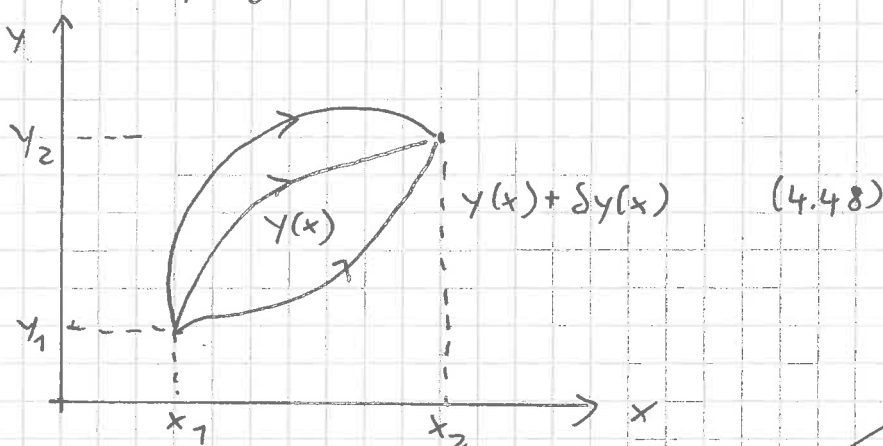
Dort ist $g'(x) = 0$ und es liegt ein „Extremum“ (Minimum, Maximum, bei Funktionen über dem \mathbb{R}^n Sattelpunkt) vor.

• Übertragung auf Funktionale:

$$\delta I := I[y + \delta y] - I[y] \quad (4.46)$$

wobei $\delta y(x)$ eine Funktion ist mit

$$\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0 \quad (4.47)$$



c) Nebenrechnung

$$\delta I = I[y + \delta y] - I[y] =$$

$$(4.44) \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ f(y(x) + \delta y(x), y'(x) + \delta y'(x), x) - f(y(x), y'(x), x) \right\} =$$

$$\stackrel{\text{Näh.}}{=} \lim \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \delta y(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y(x) \right\} \quad (4.49)$$

• Zweiter Summand:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y(x) =$$

$$\stackrel{\text{Part.}}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right\} \delta y(x) \quad (4.50)$$