(4.50) in (4.49):

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right\} \delta y(x) =$$

Schreib-weise:
$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\delta f}{\delta y} \delta y \overset{\text{Stationär}}{=} 0 \qquad (4.51)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \qquad (4.52)$$

„Eulersche Differenzialgleichung der Variationsgleichung", identisch mit der Lagrangeschen Gleichung 2. Art in einer Dimension, wenn $f(y(x), y'(x), x) = L(q(t), \dot{q}(t), t)$

4.4.2. Das Hamiltonscher Extremalprinzip

Postulat

Einem mechanischen System mit f Freiheitsgraden und Konfigurationskoordinaten $\underline{q} = [q_1, \dots q_f]$ sei eine $\mathbb{C}^2$-Funktion der Variablen $\underline{q}, \dot{\underline{q}}$ und t:

$$L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) \qquad (4.53)$$

die Lagrangefunktion, zugeordnet. Jede physikalische Bahnkurve, d.h. Lösung $\underline{q}(t) = [q_1(t), \dots q_f(t)]$ der Bewegungsgleichungen im Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ mit Randwerten $\underline{q}(t_1) = \underline{a}$ und $\underline{q}(t_2) = \underline{b}$ macht das Wirkungsintegral

$$\boxed{I[\underline{q}] := \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t), t)} \qquad (4.54)$$

stationär. „Wirkung": L = Energie, I = Energie × Zeit

4.4.3. Die Euler-Lagrange-Gleichungen

a) Gleichungen und Interpretation

Notwendig und hinreichend für die Stationarität von $I[q]$ bei $q(t)$ ist, dass $q(t)$ die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\boxed{\frac{\delta L}{\delta q_k} \overset{(4.34)}{=} \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = 0 \,, \quad k = 1, \dots, f}$$

erfüllt, die aus dem differenziellen d'Alembert-Prinzip folgen.

b) Beweis

$$\delta I = I[q + \delta q] - I[q] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \{ L(q(t), + \delta q(t), \ \dot q(t) + \delta \dot q(t), t) - L(q(t), \dot q(t), t) \} =$$

$$\overset{\text{lin}}{\underset{\text{Näh.}}{=}} \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \delta \dot q_k \right\} =$$

$$\overset{\text{part.}}{\underset{\text{Int.}}{=}} \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \right\} \delta q_k = 0 \qquad \Rightarrow (4.34) \text{ qed}$$

4.4.4. Beispiele

a) Harmonischer Oszillator

- $L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot q^2 - \omega^2 q^2) \,, \quad C = m\omega^2 \qquad (4.55)$

- Setze
$$\left.\begin{aligned} z(\tau) &:= \omega \sqrt{m}\, q(t) \,, \quad \tau := \omega t \\ z'(\tau) &:= \frac{dz}{d\tau}\, \omega \sqrt{m}\, \dot q(t) \frac{dt}{d\tau} = \sqrt{m}\, \dot q \end{aligned}\right\} \quad (4.56)$$

Die Zeit wird in Einheiten von $\omega^{-1} = T/2\pi$ gemessen.

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow L &= \frac{1}{2}\left(z'^2 - z^2\right) \\ \frac{\delta L}{\delta z} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial z'} = -z - z'' = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.57)$$

- Wenn $z(\tau=0)=0$ und $z(\tau=\frac{\pi}{2})=1$ ist, so ist die Lösung:

$$\left.\begin{aligned} z(\tau) &= \sin\tau \\ z'(\tau) &= \cos\tau \\ z''(\tau) &= -\sin\tau \end{aligned}\right\} \quad (4.58)$$

- Wirkungsintegral für die physikalische Bahn:

$$I[z] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\tau \left(\cos^2\tau - \sin^2\tau\right) = 0 \quad (4.59)$$

- Vergleichsweg: $\delta z = \varepsilon \sin 2\tau \qquad \delta z(0) = \delta z(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\delta z' = 2\varepsilon\cos 2\tau \qquad (4.60)$$

- Wirkung:

$$I[z+\delta z] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\tau \left\{(\cos\tau + 2\varepsilon\cos 2\tau)^2 - (\sin\tau + \varepsilon\sin 2\tau)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\tau \Big\{ \cos^2\tau - \sin^2\tau \qquad \leftarrow I[z]$$

$$+ 4\varepsilon\cos\tau\cos 2\tau - 2\varepsilon\sin\tau\sin 2\tau$$

$$\uparrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot z}\delta \dot z + \frac{\partial L}{\partial z}\delta z = 0$$

$$+ 4\varepsilon^2\cos^2 2\tau - \varepsilon^2\sin^2 2\tau \Big\} = \frac{3\pi}{8}\varepsilon^2 > 0 \qquad (4.61)$$

d.h. für die echte Bahn ist die Wirkung ein Minimum.

b) Teilchen im elektromagnetischen Feld

• Lagrange-Funktion (postuliert)

$$L(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\underline{x}}^2 - q\, \phi(\underline{x}, t) + \frac{q}{c}\, \dot{\underline{x}} \cdot \underline{A}(\underline{x}, t) \qquad (4.62)$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

$$T \quad - \quad V \quad - \quad M$$

q: Ladung des Teilchens ($-|e|$ für das Elektron)

$\phi(\underline{x}, t)$: skalares Potential

$\underline{A}(\underline{x}, t)$: Vektorpotential

$\frac{q}{c} \dot{\underline{x}}$: „Strom"

M : geschwindigkeitsabhängiges Potential

• Es gilt:

$$\underline{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$$

$$\text{bzw.} \quad E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \qquad (4.63a)$$

$$\underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A} \qquad (4.63b)$$

Bewegungsgleichungen

• (4.34) ergibt:

$$\boxed{m \ddot{\underline{x}} = q \underline{E} + \frac{q}{c} (\dot{\underline{x}} \times \underline{B})} \qquad (4.64)$$

Lorentz-Kraft in Gaußeinheiten

<detailierte Rechnung siehe Übungen>.

4.4.5 Der kanonisch konjugierte Impuls und zyklische Variable

a) Für ein Teilchen ohne Zwangsbedingungen in Kart. Koord. und mit

$$L(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t) = T - V = \frac{1}{2} m \underline{\dot{x}}^2 - V(x) \qquad (4.65)$$

ist $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\underline{\dot{x}} = \underline{p}$ der Impuls

- Man nennt in Verallgemeinerung die Größe

$$\boxed{p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}} \qquad (4.66)$$

den zu q_k kanonisch konjugierten Impuls.

b) Beispiel

- Für die ebene Bewegung und in Zylinderkoordinaten (Vgl. Keplerproblem (2.18)(3.56)) ist

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r, \varphi) \qquad (4.67)$$

und

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad (4.68)$$

der „radiale Impuls" sowie

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \overset{(3.54)}{=} \ell \qquad (4.69)$$

der „Drehimpuls"

e) Zyklische Koordinaten

- Wenn L von einer Koordinate q_k nicht abhängt, so gilt: $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ und es ist

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \overset{(4.34)}{=} 0 \overset{(4.66)}{=} \dot{p}_k \qquad (4.70)$$

- D.h. der kanonisch konjugierte Impuls ist zeitlich konstant, also ein „Integral der Bewegung"
- Beispiel: Im Keplerproblem ist $V = V(r)$ und $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ also der Drehimpuls $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = const$ (Flächensatz!)
- Freies Teilchen: $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow p_i = const$
- q_k (und im Bsp φ, x_i) heißt „zyklische Koordinate"

4.5 Die hamiltonschen Bewegungsgleichungen

4.5.1. Vorbemerkungen und Motivation

- Für ein Teilchen in 1D sei

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \qquad (4.71)$$

so dass die Bewegungsgleichung (4.34) lautet:

$$m\ddot{x} = -V'(x) \qquad (4.72)$$

- Dies ist eine gewöhnliche Differenzialgleichung 2. Ordnung in der Zeit. Der kanonisch konjugierte Impuls ist

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$