und es gilt:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -V'(x) \end{aligned}\right\} \quad (4.73)$$

- Dies ist ein gekoppeltes System von zwei gewöhnlichen Differenzialgleichungen 1. Ordnung.

- Ziel: Verallgemeinerung von (4.73) auf generalisierte Koordinaten

4.5.2. Die Hamilton-Funktion

- Es gilt für den kanonisch konjugierten Impuls: (4.66):

$$p_k(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q, \dot{q}, t), \quad k = 1, \dots, f \quad (4.74)$$

- Die Gleichungen lassen sich genau dann in eindeutiger Weise nach den $\dot{q}_k$ auflösen, wenn gilt:

$$\det\left\{\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_i}\right\} = \det\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i}\right\} \neq 0 \quad (4.75)$$

Jacobische Determinante

- Wird in der Regel angenommen

- Auflösung (Umkehrung) ergibt:

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k(q, p, t) \quad (4.76)$$

- Die Hamilton-Funktion ist definiert als:

$$\boxed{H(q, p, t) = \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)} \quad (4.77)$$

4.5.3. Die hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{f} p_k \frac{\partial \dot q_k}{\partial q_i}(q,p,t) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\left(q,\dot q(q,p,t),t\right)$$

$$\overset{kR}{-\sum_{k=1}^{f}} \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\frac{\partial \dot q_k}{\partial q_i}} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \underset{(4.34)}{\overset{(4.66)}{=}} -\dot p_i \qquad (4.78)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot q_i(q,p,t) + \sum_{k=1}^{f} p_k \frac{\partial \dot q_k}{\partial p_i} - \overset{kR}{\sum_{k=1}^{f}} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\frac{\partial \dot q_k}{\partial p_i} = \dot q_i \qquad (4.79)$$

- Die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \overset{(4.34)}{=} 0$$

sind äquivalent zu den hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \dot q_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot p_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}} \qquad (4.80)$$

- System von 2f gewöhnlichen Differenzialgleichungen erster Ordnung in den Variablen $q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f$ d.h. <über dem Phasenraum $\{q_1, \dots q_f, p_1, \dots, p_f\}$ >

4.5.4. Beispiel: Teilchen im elektromagnetischen Feld

- Lagrange-Funktion aus (4.62)

$$L(\underline{x},\dot{\underline{x}},t) = \frac{1}{2} m \dot{\underline{x}}^2 - q\,\phi(\underline{x},t) + \frac{q}{c}\,\dot{\underline{x}}\cdot\underline{A}(\underline{x},t)$$

- Kanonisch konjugierter Impuls

$$\boxed{\underline{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{x}}} = m\dot{\underline{x}} + \frac{q}{c}\underline{A}(\underline{x},t)} \qquad (4.81)$$

anders als der „Kinetische Impuls" $m\dot{\underline{x}}$!!

• Hamilton-Funktion:

$$\boxed{H(\underline{x},\underline{p},t) = \frac{1}{2m}\left\{\underline{p} - \frac{q}{c}\underline{A}\right\}^2 + q\,\Phi} \qquad (4.82)$$

• Bewegungsgleichungen:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m}\left\{p_i - \frac{q}{c}A_i\right\} \qquad (4.83a)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{q}{mc}\sum_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\left\{p_k - \frac{q}{c}A_k\right\} - q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \qquad (4.83b)$$

<Details Übungen>

4.5.5 Form und Invarianzeigenschaften der HamiltonFunktion

a) H als Konstante der Bewegung

• Sei H nicht explizit zeitabhängig, so gilt:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i \overset{(4.80)}{=}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \qquad (4.84)$$

und H ist Konstante der Bewegung.

b) $H = T + V$

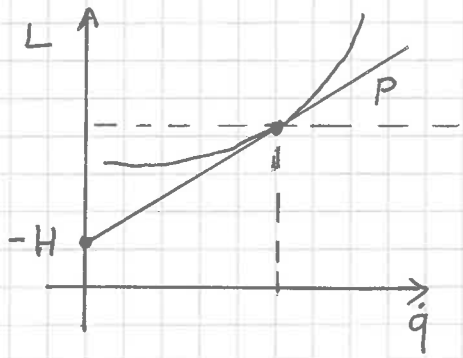
• Sei $V = V(\underline{q})$, also nicht explizit zeitabhängig, und $T(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$ eine homogene Funktion zweiten Grades in $\dot{q}$:

• Eulerscher Satz über homogene Funktionen

$$\sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2\,T \qquad (4.85)$$

Legendre-Transformation

- Gegeben: $L(q, \dot{q}, t)$
- Gesucht: $H(q, p, t)$
- Keine Koordinatentransformation, da $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$
- Der Einfachheit halber eindimensional. Geometrische Anschauung:



- L ist die Einhüllende der Tangentenschar $(-H, p)$
- Also gilt: $p = \frac{L+H}{\dot{q}}$

$$\Rightarrow \quad L = \dot{q} p - H$$

oder $H = p\dot{q} - L$

- Es ist:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \dot{p}\, dq + p\, d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = d(p\dot{q}) - dL = \cancel{p\, d\dot{q}} + \dot{q}\, dp - \dot{p}\, dq - \cancel{p\, d\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \dot{q}\, dp - \dot{p}\, dq - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

- Also: $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$

- Folgt:

$$H = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - T + V, \text{ also}$$

$$\boxed{H = T + V = E = \text{const}} \qquad (4.86)$$

4.6. Die Poisson klammer

a) Änderung einer Observablen

- Eine Observable („Meßgröße") g ist eine Funktion $g(q, p, t)$ über dem Phasenraum
- Beispiele: Energie $H(q,p,t)$, Ort q, Impuls p selbst
- Die Änderung der Observablen entlang einer Phasenraum-trajektorie ist die totale Zeitableitung

$$\frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt} g(q(t), p(t), t) = \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^{f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial g}{\partial p_i} \dot{p}_i \right\}$$

$$\overset{(4.82)}{=} \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^{f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\} =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial t} + \{ g, H \} \qquad (4.87)$$

- mit der „Poisson-klammer"

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{f} \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right\} \qquad (4.88)$$

b) Beispiele

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H, H\} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (4.89)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \qquad (4.90)$$

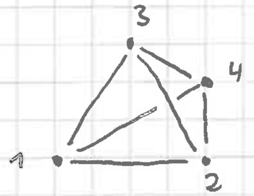
c) Poissonklammern sind Invarianten

5. Die Mechanik des starren Körpers

5.1. Kinematik

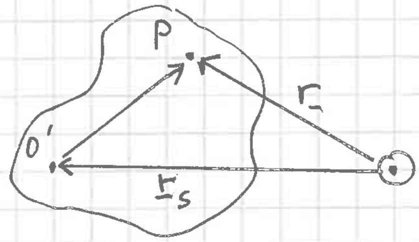
5.1.1. Realisierungen

a) System von n Massenpunkten $m_1, \dots, m_n$, die durch starre Abstände verbunden sind, mit Gesamtmasse $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$



(5.1)

b) Körper mit kontinuierlicher Massenverteilung $\rho(\underline{r})$, die sich nur durch starre Bewegung (Translation und Rotation) verändert:



Gesamtmasse $M = \int d^3\underline{r}\, \rho(\underline{r})$ (5.2)

Übergang a) $\to$ b) $\sum_i m_i \to \sum d^3\underline{r}\, \rho(\underline{r})$

5.1.2. Geschwindigkeiten der Massenpunkte

a) Zwei Koordinatensysteme

i) Raumfestes K bei O mit ONB $\{\hat{e}_1^{\,0}, \hat{e}_2^{\,0}, \hat{e}_3^{\,0}\}$ und

ii) Körperfestes K' mit Aufpunkt A und ONB $\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}$

und $\hat{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} \hat{e}_j^{\,0} R_{ji}(t)$ (5.3)

Vgl. Abschnitt 3.13.1, dort $\hat{e}_i' = \hat{e}_i(t)$.

A ist nicht notwendigerweise Schwerpunkt.