- Sei P Punkt, $\underline{x}'$ bzw. $\underline{r}(t)$ Spaltenvektor seiner Koordinaten in K' bzw K und $\underline{r}_A(t)$ Spaltenvektor der Koordinaten von A in K. Dann gilt:

$$\underbrace{\underline{r}_{(i)}(t)}_{\text{diskret}} = \underline{r}_{A(i)}(t) + \underline{\underline{R}}(t)\, \underline{x}'_{(i)} \qquad (5.4)$$

- Körperfest : $\rho'(\underline{x}')$ zeitunabhängig
- Raumfest : $\rho(\underline{r},t) = \rho'(\underbrace{\underline{\underline{R}}^{-1}(t)\,(\underline{r}-\underline{r}_A(t))}_{\underline{x}'})$ (5.5)

b) Geschwindigkeiten

- In K gilt für die Geschwindigkeiten von P:

$$\underline{v}(\underline{x}',t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d\underline{r}_A}{dt} + \dot{\underline{\underline{R}}}(t)\,\underline{x}' \qquad (5.6)$$

- Sei nun

$$\left.\begin{aligned} \underline{x} &:= \underline{r} - \underline{r}_A \overset{(5.4)}{=} \underline{\underline{R}}(t)\,\underline{x}' \\ \text{bzw:}\quad \underline{x}' &= \underline{\underline{R}}^{-1}(t)\,\underline{x} = \underline{\underline{R}}^{+}(t)\,\underline{x} \end{aligned}\right\} (5.7)$$

- Dann folgt in K: $\underline{r} = \underline{r}_A + \underline{x}$ (5.8)

$$\underline{v}(\underline{x}',t) \underset{(5.7)}{\overset{(5.6)}{=}} \frac{d\underline{r}_A}{dt} + \dot{\underline{\underline{R}}}(t)\,\underline{\underline{R}}^{-1}(t)\,\underline{x} \overset{(3.166)}{=}$$

$$= \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{x} \qquad (5.9a)$$

Diskret: $\underline{v}_i(t) = \underline{v}_A(t) + \underline{\omega} \times \underline{x}_i$ (5.9b)

- $\underline{v}$ gleich Translationsgeschwindigkeit des Aufpunkts A plus Winkelgeschwindigkeit

- NB! oB: $\underline{\omega}$ ist nicht von Aufpunkt A und Orientierung von $\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}$ abhängig!

2.12

5.2. Dynamik

5.2.1. Drehimpuls und Trägheitsvektor

a) Drehimpuls

$$\underline{L} = \sum_i^n m_i \left(\underline{r}_i \times \underline{v}_i\right) \underset{(5.9b)}{\overset{(5.4)}{=}} \sum_i^n m_i \left(\underline{r}_A + \underline{x}_i\right) \times \left(\underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{x}_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \underline{r}_A \times \underline{v}_A + \underline{r}_A \times \left(\underline{\omega} \times \underline{x}_i\right) + \underline{x}_i \times \underline{v}_A + \underline{x}_i \times \left(\underline{\omega} \times \underline{x}_i\right) \right\} \qquad (5.10)$$

- Falls A der Schwerpunkt S ist, so gilt:

$$\sum_{i=1}^n m_i \underline{x}_i = 0 \quad \text{und} \qquad (5.11)$$

$$\underline{L} = M \, \underline{r}_S \times \underline{v}_S + \sum_{i=1}^n m_i \, \underline{x}_i \times \left(\underline{\omega} \times \underline{x}_i\right) \qquad (5.12)$$

b) Drehimpuls bezüglich A

$$\underline{L}_A = \sum_{i=1}^m m_i \, \underline{x}_i \times \left(\underline{\omega} \times \underline{x}_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^m m_i \left\{ \underline{x}_i^2 \, \underline{\underline{1}} - \underline{x}_i \otimes \underline{x}_i \right\} \underline{\omega} =$$

$$=: \underline{\underline{\Theta}} \, \underline{\omega} \qquad (5.13)$$

mit dem „Trägheitstensor"

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{\Theta}} &:= \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \underline{x}_i^2 \, \underline{\underline{1}} - \underline{x}_i \otimes \underline{x}_i \right\} \quad \text{bzw} \\ \underline{\underline{\Theta}} &:= \int d^3\underline{x} \; \varrho(\underline{x},t) \left\{ \underline{x}^2 \, \underline{\underline{1}} - \underline{x} \otimes \underline{x} \right\} \end{aligned}} \qquad (5.14)$$

- Komponenten:

$$\Theta_{kl} = \int d^3\underline{x} \; \varrho(\underline{x},t) \left\{ x^2 \delta_{kl} - x_k x_l \right\} \qquad (5.15)$$

5.2.2. Translations- und Rotationsenergie

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (\underline{v}_A + \underline{\omega}\times\underline{x}_i)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \{\underline{v}_A^2 + 2\underline{v}_A\cdot(\underline{\omega}\times\underline{x}_i) + (\underline{\omega}\times\underline{x}_i)^2\} \qquad (5.16)$$

• Sei A wieder der Schwerpunkt S, so gilt:

$$T = \frac{1}{2} M \underline{v}_S^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \{\underline{\omega}^2 \underline{x}_i^2 - (\underline{\omega}\cdot\underline{x}_i)^2\} \qquad (5.17)$$

gemäß $(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{c}\times\underline{d}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})(\underline{b}\cdot\underline{d}) - (\underline{a}\cdot\underline{d})(\underline{b}\cdot\underline{c})$ (5.18)

• Ferner $\underline{\omega}^2\underline{x}_i^2 - (\underline{\omega}\cdot\underline{x}_i)^2 = \underline{\omega}\cdot\underline{x}_i^2\cdot\underline{\underline{1}}\cdot\underline{\omega} - \underline{\omega}\cdot(\underline{x}_i\otimes\underline{x}_i)\cdot\underline{\omega}$ (5.19)

also

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M \underline{v}_S^2 + \frac{1}{2}\,\underline{\omega}\cdot\underline{\underline{\Theta}}\cdot\underline{\omega}} \qquad (5.20)$$

5.2.3. Bewegungsgleichungen

a) Drehmoment bezüglich A

$$\left.\begin{aligned} \underline{M} &:= \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i \times \underline{F}_i \quad \text{bzw.} \\ \underline{M} &:= \int d^3x\, \rho(x,t)\, \underline{x}\times\underline{F}(\underline{x}) \end{aligned}\right\} \qquad (5.21)$$

b) Bewegungsgleichung

• Sei A gleich dem Schwerpunkt S. Dann gilt bezüglich S:

$$\underline{L}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i (\underline{r}_i - \underline{r}_S)\times(\underline{r}_i - \underline{r}_S)^{\cdot} \qquad (5.22)$$

$$\frac{d\underline{L}_S}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\underline{r}_i - \underline{r}_S)\times(\underline{r}_i - \underline{r}_S)^{\cdot\cdot} = $$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i \times (\underline{F}_i - m_i \ddot{\underline{r}}_S) \overset{(5.21)}{\underset{(5.11)}{=}} \underline{M} \qquad (5.23)$$

- Also:

$$\boxed{\underline{M} = \frac{d\underline{L}_s}{dt} = \frac{d}{dt}\; \underline{\underline{\Theta}}(t)\; \underline{\omega}(t)} \qquad (5.24)$$

$$\text{Ferner: } \boxed{M\ddot{\underline{r}}_s = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \underline{F} = \text{Gesamtkraft}} \qquad (5.25)$$

c) Umformung

- Schreibe Gleichung (5.24) um ins mitbewegte Bezugssystem, da dort Θ zeitunabhängig. Es gilt:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \underline{\omega} \times \qquad (3.174)$$

und

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{M} &= \frac{d'\underline{L}_s}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{L}_s = \\ &= \underline{\underline{\Theta}}\, \frac{d\underline{\omega}'}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{\underline{\Theta}} \cdot \underline{\omega} \end{aligned}} \qquad (5.26)$$

„Eulersche Kreiselgleichungen“, nichtlinear!

5.3. Eigenschaften des Trägheitstensors

5.3.1. Explizite Form

$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{bmatrix} = \int d^3\underline{x}\; \rho(\underline{x}) \begin{bmatrix} x_2^2+x_3^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_2x_1 & x_3^2+x_1^2 & -x_2x_3 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & x_1^2+x_2^2 \end{bmatrix}$$

Θ_{ii} : „Diagonalträgheitsmomente“

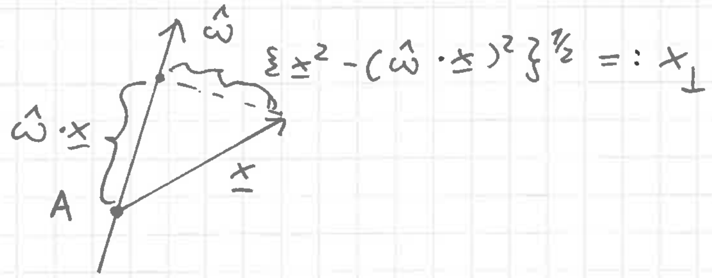
$\Theta_{ij} \overset{!}{=} \Theta_{ji} \quad i \neq j$ „Deviationsmomente“

5.3.2. Bezüglich fester Achsen

• Setze $\underline{\omega} =: \omega \, \hat{\omega}$ (5.28)

$$T_{rot} \overset{(5.20)}{=} \frac{1}{2} \, \underline{\omega} \cdot \underline{\underline{\Theta}} \cdot \underline{\omega} = \frac{1}{2} \, \omega^2 \, \Theta_{\hat{\omega}} \quad \text{mit}$$

$$\Theta_{\hat{\omega}} := \int d^3\underline{x} \; \rho(\underline{x}) \; \{ \underline{x}^2 - (\hat{\omega} \, \underline{x})^2 \} \qquad (5.29)$$



$$\boxed{\Theta_{\hat{\omega}} = \int d^3\underline{x} \; \rho(\underline{x}) \; x_\perp^2} \qquad (5.30)$$

5.3.3. Der Satz von Steiner

• Sei $\underline{\underline{\Theta}}_S$ der Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunkts S als Aufpunkt. Sei A ein um $\underline{a}$ verschobener Aufpunkt, $\underline{r}_A = \underline{r}_S + \underline{a}$ aber die ONB $\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}$ beibehalten. Dann gilt:

o B:

$$\underline{\underline{\Theta}}_A = \underline{\underline{\Theta}}_S + M \{ \underline{a}^2 \underline{\underline{1}} - \underline{a} \otimes \underline{a} \} \qquad (5.31)$$

$$\underline{\underline{\Theta}}_{A\hat{\omega}} = \underline{\underline{\Theta}}_{S\hat{\omega}} + M \, a_\perp^2 \qquad a_\perp^2 = a^2 - (\hat{\omega} \cdot \underline{a})^2 \qquad (5.32)$$

• Unter allen auf parallelen Achsen bezogenen Trägheitsmomenten ist das auf die Schwerpunktachse bezogene am kleinsten.