

b) Interferenz

- Ein Photodetektor misst am Ort r den zeitlich gemittelten Energiefluss, bspw. einer elektromagnetischen Welle

$$\frac{c}{4\pi} \langle \underline{E}^2 \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 \rangle$$

$$=: I \quad (1.12)$$

- Betrachte davon eine harmonisch schwingende Komponente, z.B. $E_x = \chi$:

$$\chi(z, t) = \chi_0 \cos(kz - \omega t + \varphi) \quad (1.5)$$

$$\langle \chi^2 \rangle = \chi_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T dt \cos^2(kz - \omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2} \chi_0^2 = \frac{1}{2} |\chi_0^c|^2 = \frac{1}{2} |\chi^c|^2 \quad (1.13)$$

- Werden zwei Wellen derselben Frequenz, aber mit verschiedenen Phasen φ_1 und φ_2 überlagert, so gilt:

$$\langle (\chi^{(1)} + \chi^{(2)})^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \{ \chi_0^{(1)} \cos(kz - \omega t + \varphi_1) + \chi_0^{(2)} \cos(kz - \omega t + \varphi_2) \}^2 dt$$

$$\stackrel{(1.13)}{=} \frac{1}{2} \{ \chi_0^{(1)2} + \chi_0^{(2)2} \} +$$

$$+ \frac{2}{T} \int_0^T \chi_0^{(1)} \chi_0^{(2)} \cos(kz - \omega t + \varphi_1) \cos(kz - \omega t + \varphi_2) dt$$

$$= \frac{1}{2} \{ \chi_0^{(1)2} + \chi_0^{(2)2} + \underbrace{2 \chi_0^{(1)} \chi_0^{(2)} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}_{\text{Interferenzterm!}} \} \quad (1.14)$$

- Kennzeichen von Wellen

- In komplexer Schreibweise:

$$\begin{aligned}
 \langle (\chi^{(1)} + \chi^{(2)})^2 \rangle & \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} |\chi^{(1)}c + \chi^{(2)}c|^2 = \\
 & = \frac{1}{2} \{ (\chi^{(1)}c + \chi^{(2)}c) \cdot (\chi^{(1)}c + \chi^{(2)}c)^* \} = \text{Konj. komplex} \\
 & = \frac{1}{2} \{ |\chi^{(1)}c|^2 + |\chi^{(2)}c|^2 + \chi^{(1)}c\chi^{(2)*} + \chi^{(1)*}c\chi^{(2)} \} \\
 & = \frac{1}{2} \{ \chi_0^{(1)2} + \chi_0^{(2)2} + 2\chi_0^{(1)}\chi_0^{(2)} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \} \quad (7.15)
 \end{aligned}$$

- Man bezeichnet daher das Betragsquadrat einer (komplex- oder reellwertigen) Welle als „Intensität“.
- Wellen zeichnen sich durch ihre „Interferenz“ aus.

11.3. Entwicklung zu kleinen Skalen

a) Korpuskular-Theorie

- Vorschlag aus der Chemie (Gesetz der multiplen Proportionen):
Materie besteht aus Atomen, Dalton 1808
- Indirekte Bestätigung: Kinetische Gastheorie,
statistische Mechanik (Boltzmann)
- Erklärung der brownischen Bewegung durch Einstein
und Smoluchowsky 1905.
- Kathodenstrahlung, Elektron J.J. Thomson 1897
- Messung der e^- -Ladung durch Millikan 1910
- Wilson-Nebelkammer 1912, Geigerzähler 1913
- Rutherford-Atom 1911: „Miniatur-Sonnensystem“

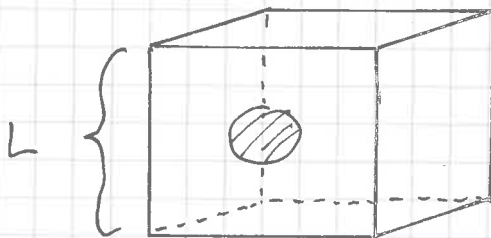


b) Elektromagnetische Strahlung

- Sichtbares Licht: $0,5 \mu\text{m}$
- Röntgenstrahlung: $0,5 \text{ nm}$ (1895)
- Kristallstreuung (von Laue 1912)
- γ -Strahlung: $10^{-17} - 10^{-11} \text{ m}$
- Messung der Wechselwirkung von Materie und elektromagnetischer Strahlung auf mikroskopischer Skala
- Vergleich der klassischen Rechnungen mit dem Experiment: fundamentale Widersprüche

1.2. Die Quantisierung des Lichts

1.2.1. Die Hohlraumstrahlung



Perfekter Absorber
Schwarze Strahlung

a) Totale Emittenz (Energiefluss pro Flächeneinheit, Strahlungsleistungsdichte)

$$R(T) = \sigma T^4 \quad (1.16)$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad (\text{Stefan 1879})$$

- Stefan-Boltzmann-Gesetz (1884)
- Spektrale Emittenz (Energiefluss pro Fläche und Frequenz, spektrale Strahlungsleistungsdichte)

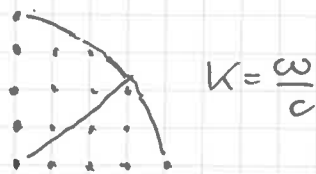
$$R(\omega, T) =: \frac{4}{c} u(\omega, T) \quad (1.17)$$

$u(\omega, T)$: Spektrale Energiedichte im Hohlraum

- $u(\omega, T) d\omega$: Energie pro Volumeneinheit im Intervall $[\omega, \omega + d\omega]$

b) Energiedichte klassisch

- Wie viele stehende Wellen $N(\omega)$ mit Kreisfrequenz $\leq \omega = ck = \frac{2\pi c}{\lambda}$ befinden sich im Hohlraum?
- Welche Wellenvektoren $\underline{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$ sind erlaubt?
- Bedingung: $k_i \cdot L = 2\pi \frac{L}{\lambda_i} = 2\pi \cdot \frac{n_i}{2} = \pi n_i$
d.h. $k_i = \frac{\pi}{L} n_i$, $n_i = 1, 2, \dots$ (1.18)
- D.h. jedes \underline{k} braucht ein Volumen $\left(\frac{\pi}{L}\right)^3$



= Im Oktant einer Kugel vom Radius $k = \frac{\omega}{c}$ befinden sich

$$N(\omega) = \frac{1}{8} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Polarisationen}}}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi k^3 / \left(\frac{\pi}{L}\right)^3 = \frac{1}{3} \frac{L^3}{\pi^2} \frac{\omega^3}{c^3} \quad (1.19)$$

- Moden (stehende Wellen), d.h. pro Frequenzintervall

$$\frac{dN}{d\omega} = \frac{L^3}{\pi^2 c^3} \omega^2 \quad (1.20)$$

- Sei $\bar{\epsilon}$ die mittlere Energie einer Mode der Frequenz ω , dann ist:

$$u(\omega, T) = \frac{1}{L^3} \frac{dN}{d\omega} \bar{\epsilon} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \bar{\epsilon} \quad (1.21)$$

c) Rayleigh-Jeans- und Wiensches Gesetz

- Annahme: Jede Mode kann Energie $0 < \epsilon < \infty$ annehmen, abhängig von der Amplitude, und zwar Boltzmann-verteilt:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon e^{-\epsilon/k_B T} d\epsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\epsilon/k_B T} d\epsilon} \stackrel{\text{Boltzmann verteilung}}{=} \text{o.B.} = k_B T \quad (1.22)$$

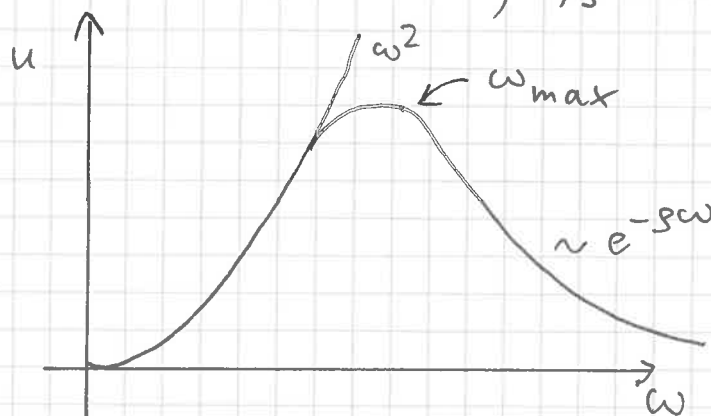
d.h. $u(\omega, T) = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \omega^2 \quad (1.23)$

„Rayleigh-Jeans-Gesetz“. Aber:

$$\int_0^{\infty} d\omega u(\omega, T) = \infty: \text{Ultraviolett Katastrophe!}$$

- Wiensches Gesetz; als Korrektur für große Frequenzen, empirisch:

$$u(\omega, T) \rightarrow A \omega^3 e^{-\beta \omega / T}, \quad A, \beta = \text{const} \quad (1.24)$$



d) Die plancksche Annahme

- Atome = Oszillatoren, in Wechselwirkung mit der Strahlung
- Oszillatoren der Frequenz ω können nur diskrete Energie-
werte, nämlich Vielfache eines Energiequants ϵ_0 , d.h.
 $e = n \epsilon_0, n = 0, 1, \dots$ annehmen.

• Folge (bei Boltzmann-Verteilung):

$$\bar{e} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \epsilon_0 e^{-n \epsilon_0 / k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \epsilon_0 / k_B T}} \stackrel{OB}{=} \frac{\epsilon_0}{e^{\epsilon_0 / k_B T} - 1} \quad (1.25)$$

• Weitere Annahme: $\epsilon_0 \propto \omega$ d.h.

$$\epsilon_0 = \hbar \omega = h \nu = h c / \lambda, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (1.26)$$

• Folgt:

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1}$$

• $k_B T \gg \hbar \omega$: Rayleigh-Jeans:

$$e^{\hbar \omega / k_B T} - 1 \approx \frac{\hbar \omega}{k_B T}$$

• $k_B T \ll \hbar \omega$: Wien:

$$e^{\hbar \omega / k_B T} - 1 \approx e^{\hbar \omega / k_B T}$$

$$\frac{U}{V} = \int_0^{\infty} d\omega u(\omega, T) \stackrel{OB}{=} \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} T^4 \stackrel{(1.16)}{=} \stackrel{(1.17)}{=} 4 \frac{R}{c} \stackrel{(1.17)}{=} \frac{4}{c} \delta T^4 \quad (1.27)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \quad (1.28) \quad \left\langle \int_0^{\infty} \frac{dx x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \right\rangle$$