

•  $\beta$  enthält  $k_B, c$  und  $h$ . Werte:

$h = 6,626\ 068\ 96\ (33) \cdot 10^{-34}\ \text{Js}$  Plancksches Wirkungsquantum

$\hbar = 1,054\ 571\ 628\ (53) \cdot 10^{-34}\ \text{Js}$

$k_B = 1,380\ 6504\ (24) \cdot 10^{-23}\ \text{J K}^{-1}$  Boltzmannkonstante

$c = 299\ 792\ 458\ \text{m s}^{-1}$

• Erstmaliges Auftreten des Wirkungsquantum!

e) Wiensches Verschiebungsgesetz

$\hbar \omega_{\text{max}} = 2,821\ k_B T$

• Sonne:  $\lambda_{\text{max}} = 483\ \text{nm}$  bei  $6000\ \text{K}$

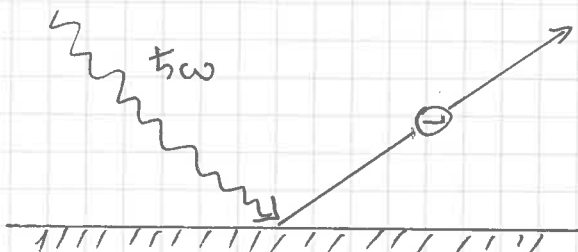
• Kosmische Hintergrundstrahlung:  $3\ \text{K}$

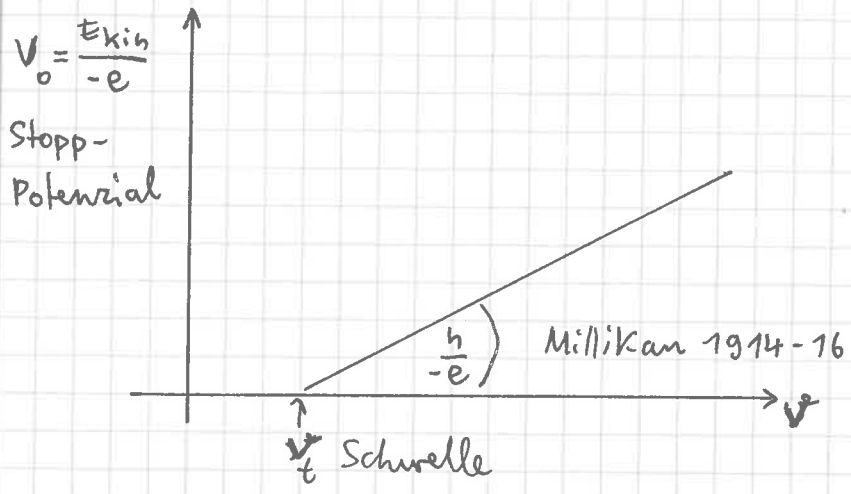
1.2.2. Der photoelektrische Effekt

a) Experimente

• Hertz (1887, Funken), Philipp Lenard (1900, Identifikation der Elektronen):

UV-Licht (bei Alkalimetallen sichtbares Licht) auf Metallfolie gerichtet emittiert Elektronen:





$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_t^2 = h\nu - W$

Elektrodynamik: Energiedichte  $u = \frac{1}{8\pi} (\underline{E}^2 + \underline{H}^2) \propto I$  (1.12)

el.  $\downarrow$  mag. Feld  $\downarrow$

- Akkumulieren Elektronen Energie aus dem Feld?
- Widersprüche:
  - i) Schwellfrequenz, unabhängig von der Intensität
  - ii)  $E_{kin}$  linear abhängig, unabhängig von Intensität
  - iii) keine Zeitverzögerung (Meyer, Geulach)

b) Erklärung durch Einstein 1905

- Licht besteht aus Lichtquanten der Energie

$E = h\nu = \hbar\omega$  (1.28)

die sich mit der Geschwindigkeit  $c \parallel \underline{k}$  ausbreiten.

- $W$  ist die Austrittsarbeit zum Verlassen der Metalloberfläche.
- Also: Licht zeigt gleichzeitig Wellen- und Teilchen-eigenschaften („Dualismus“)

### c) Vertiefende Erklärung

- Photonen sind relativistische Teilchen
- Spezielle Relativitätstheorie: Viererimpuls

$$p = \begin{bmatrix} E/c \\ \underline{p} \end{bmatrix} = m u = m \gamma \begin{bmatrix} c \\ \underline{v} \end{bmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.29)$$

Viererskalarprodukt Invariant

$$p^2 = p^0{}^2 - \underline{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2 = m^2 u^2 \stackrel{!}{=} m^2 c^2 \quad (1.30)$$

- Relativistische kinetische Energie:

$$E^2 = \underline{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.31)$$

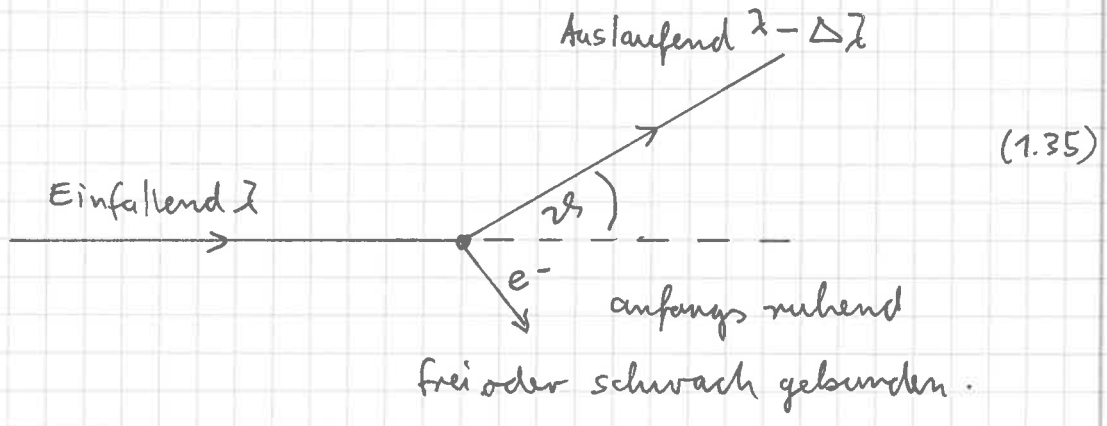
$$m_{\text{Phot}} = 0 \Rightarrow E = |\underline{p}| c \stackrel{(1.28)}{=} \hbar \omega \stackrel{(1.7)}{=} \hbar c |\underline{k}| \quad (1.32)$$

- Hypothese:

$$\begin{aligned} \underline{p} &= \hbar \underline{k}, \quad \lambda = \frac{h}{p} \\ E &= \hbar \omega \\ p &= \begin{bmatrix} E/c \\ \underline{p} \end{bmatrix} = \hbar \begin{bmatrix} \omega/c \\ \underline{k} \end{bmatrix} =: \hbar \underline{k} \end{aligned} \quad (1.33)$$

- Bestätigt durch Comptoneffekt
- Vorgriff: (1.33) gilt auch für freie Materieteilchen (de Broglie 1923)
- Wellenlänge des Elektrons:

$$\lambda = \frac{2\pi \hbar}{p} = \frac{2\pi \hbar c}{\sqrt{2mc^2(p^2/2m)}} = \frac{12,2 \text{ \AA}}{\sqrt{E_{\text{kin}} \text{ (eV)}}} \quad (1.34)$$



frei oder schwach gebunden.

• Änderung der Wellenlänge:

$$\Delta\lambda = 4\pi \frac{\hbar}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (1.36)$$

$\lambda_c$  Compton wellenlänge des Elektrons  
 $3,86 \cdot 10^{-13} \text{ m} = 0,386 \text{ pm}$

• Erklärbar durch inelastischen Stoß von Lichtquanten mit dem Elektron:

$$\hbar k + p = \hbar k' + p' \quad (1.37)$$

$$\hbar \begin{pmatrix} \omega/c = k \\ \underline{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} k' \\ \underline{k}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{p'^2 + m^2 c^2} \\ p' \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

$\approx mc + \frac{p'^2}{2mc} + \dots$

1.3. Die Quantisierung der Materie

1.3.1. Spektrallinien des Wasserstoffatoms

a) Experimentelle Ergebnisse

Fortschritte in der Spektroskopie:

- Kirchhoff 1859: Spektrallinien gleich in Emission und Absorption, Charakteristisch für ein Element.

- Balmer 1885, unformuliert durch Rydberg 1889:

Wellenzahlen bei Wasserstoff:

$$\nu_{ab} = R_H \left\{ \frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2} \right\} \quad (1.39)$$

$$n_a = 1, 2, \dots \quad n_b = 1, 2, \dots$$

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{4\pi \hbar^3} = 3,289 841 960 361 (22) \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$R_H = \frac{\tilde{m}_e e^4}{4\pi \hbar^3} + K_{\text{corr}} = 3,288 0511 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad (1.40)$$

$$\frac{1}{\tilde{m}_e} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p} \quad \text{inverse reduzierte Masse}$$

$n_a = 1$  Lyman,  $n_a = 2$  Balmer,  $n_a = 3$  Paschen,  $n_a = 4$  Brackett,

$n_a = 5$  Pfund,  $n_a = 6$  Humphreys

$n_b$  immer  $n_a + 1, n_a + 2, \dots$

## b) Paradoxie

- Elektronen bewegen sich beschleunigt auf Kreisbahnen, sollten kontinuierlich Strahlung abgeben und in den Kern stürzen.
- Linienspektren nicht erklärbar!

## c) Das bohrsche Atommodell (1913)

- Verbindung von Konzepten des Rutherfordatoms, der Planck- und Einsteinquanten:
  - i) Nur ausgewählte Elektronenbahnen erlaubt, „stationäre Zustände“, mit Energien  $E_a, E_b, E_c, \dots$

ii) Bei Bahnwechsel Strahlungsemission oder -absorption derart, dass

$$h\nu_{ab} = E_b - E_a \quad (1.41)$$

iii) Die stationären Bahnen erfüllen die Quantisierungsbedingung

$$\oint p_i dq_i = n_i h \quad (1.42) \quad \text{< keine Summe! >}$$

für generalisierte Koordinaten  $q_i$  und konjugierte Impulse  $p_i$ , integriert über eine Bahnperiode

• Kreisbahn im elektrostatischen Potential:

Kernladung  $\rightarrow \frac{Ze^2}{r^2}$  =  $\frac{mv^2}{r}$   $\leftarrow$  Zentripetalkraft

↑  
Anziehungskraft

$$(1.43)$$

$$\oint p_\varphi d\varphi = 2\pi l = 2mvr = nh \quad (1.44)$$

• Folgt:  $r = \frac{nh}{mv} \quad (1.45)$

in (1.43)  $v = \frac{Ze^2}{\hbar n} \quad (1.46)$

in (1.45)  $r = \frac{\hbar^2 n^2}{Zme^2} \quad (1.47)$

• Eingesetzt in:

$$E = T + V = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{Ze^2}{r}$$

$$E_n = - \frac{m (Ze^2)^2}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$Z=1 \quad h R_H \approx 13,6 \text{ eV}$

$$(1.48)$$

$m$ : Reduzierte Masse des Elektrons ( $= \tilde{m}_e$ )