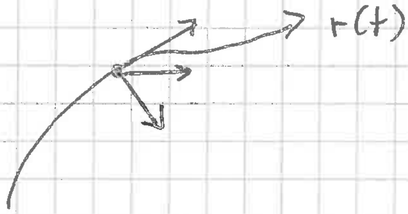
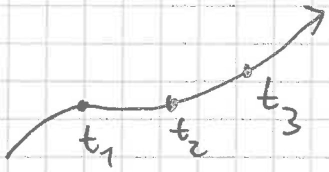
- Bahnabhängige Orthonormalbasen: siehe



2.2.3 Bahnen

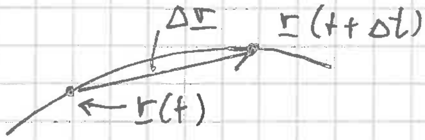


- Sind durch die Zeit parametrisierte Punktefolgen in E^3 bzw $\mathbb{R}^3$
- Zeit: Eindimensionaler affiner Raum. Nach Wahl eines Nullpunktes und einer Basis gleich $\mathbb{R}$
- Bahn ist Abbildung

$$\mathbb{R} \text{ oder } [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \tag{2.7}$$
$$t \longmapsto \underline{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

- Koordinatenfunktionen $x_i(t)$ (z.B $x(t)$, oder $r(t)$) mindestens zweimal stetig differenzierbar

2.3. Geschwindigkeit



2.3.1. Definition und Folgerungen

- Mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$

$$\frac{1}{\Delta t} \{ \underline{r}(t+\Delta t) - r(t) \} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \tag{2.8}$$

- Momentangeschwindigkeit:

$$\underline{v} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} =: \frac{dr}{dt}(t) = \underline{v}(t) = \dot{\underline{r}} \tag{2.9}$$

- $\underline{v}$ zeigt parallel zur Bahntangente.
  Ist ein Vektor aus dem Tangenzialraum bei $\underline{r}$.

< Tangenzialraum ist Vektorraum aus Tangenten von allen Bahnen durch $\underline{r}$, genannt $T_{\underline{r}} \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ >

2.3.2. Geschwindigkeit in Koordinaten

- Kartesische Koordinaten:

$$\underline{r}(t) = x(t)\,\hat{e}_x + y(t)\,\hat{e}_y + z(t)\,\hat{e}_z \qquad (2.10)$$

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{x}(t)\,\hat{e}_x + \dot{y}(t)\,\hat{e}_y + \dot{z}(t)\,\hat{e}_z \qquad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \quad \text{etc.}$$

$$\underline{v}^2(t) = v^2(t) = \dot{x}^2 \cancel{(t)}\, \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \qquad (2.12)$$

- Zylinderkoordinaten:

$$\underline{r}(t) = \rho(t)\,\hat{e}_\rho(\underline{r}(t)) + z(t)\,\hat{e}_z \qquad (2.13)$$

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{\rho}(t)\,\hat{e}_\rho + \rho(t)\frac{d}{dt}\hat{e}_\rho(\underline{r}(t)) + \dot{z}(t)\,\hat{e}_z \qquad (2.14)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_\rho(\rho(t),\varphi(t),z(t)) = \cancel{\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \rho}}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \cancel{\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial z}}\frac{dz}{dt} \qquad (2.15)$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \varphi} \overset{(2.3)}{=} +\hat{e}_\varphi \qquad (2.16)$$

Folgt:

$$\underline{v}(t) = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + \dot{z}\,\hat{e}_z = v_\rho\,\hat{e}_\rho + v_\varphi\,\hat{e}_\varphi + v_z\,\hat{e}_z \qquad (2.17)$$

$$\left.\begin{array}{ll} v_\rho = \dot{\rho} & \text{Radialkomponente} \\ v_\varphi = \rho\dot{\varphi} & \text{Transversalkomponente} \\ v_z & z\text{-Komponente} \end{array}\right\} \text{der Geschwindigkeit}$$

- Ebene Polarkoordinaten: Schreibe ρ statt r, $z \equiv 0$

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \qquad (2.18)$$

• Polar Koordinaten:

$$\underline{r}(t) = r(t)\,\hat{e}_r\big(r(t), \vartheta(t), \varphi(t)\big) \qquad (2.19)$$

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\hat{e}}_r \qquad (2.20)$$

$$\dot{\hat{e}}_r \overset{(2.5)}{=} \cancel{\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial r}}\,\dot{r} + \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \vartheta}\,\dot{\vartheta} + \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi}\,\dot{\varphi} =$$

$$= +\dot{\vartheta}\,\hat{e}_\vartheta + \dot{\varphi}\,\sin\vartheta\,\hat{e}_\varphi \qquad (2.21)$$

Folgt:

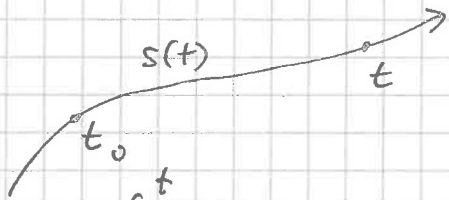
$$\underline{v}(t) = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\vartheta}\,\hat{e}_\vartheta + r\dot{\varphi}\,\sin\vartheta\,\hat{e}_\varphi$$

$$= v_r\,\hat{e}_r + v_\vartheta\,\hat{e}_\vartheta + v_\varphi\,\hat{e}_\varphi \qquad (2.22)$$

2.3.3 Bahnlänge als Bahnparameter

$$\Delta s := |\Delta \underline{r}| = |\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)| \overset{\text{Taylor}}{=} |\underline{v}(t)\Delta t| + O(\Delta t^2) \qquad (2.23)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v(t) \qquad (2.24)$$



$$s(t) = \int ds = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{dt}\,dt = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \qquad (2.25)$$

• Kehre die Funktion um $s(t) \Rightarrow t(s)$

• $\underline{r}(t(s)) =: \underline{r}(s)$: Parametrisierung durch Bahnlänge

• Zeigt besondere Eigenschaften:

$$\frac{d\underline{r}}{ds} = \frac{d\underline{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\underline{v}}{v} =: \hat{t} = \qquad (2.26)$$

Tangenteneinheitsvektor, $\underline{v} = v\hat{t}$

2.4. Beschleunigung

2.4.1. Definition

$$\underline{a}(t) := \frac{d\underline{v}}{dt}(t) = \dot{\underline{v}} \in T_{\underline{r}}\, \mathbb{R}^3 \qquad (2.27)$$

2.4.2. Beschleunigung in Koordinaten

Kartesisch aus (2.11):

$$\begin{aligned}\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) &= \ddot{x}(t)\, \hat{e}_x + \ddot{y}(t)\, \hat{e}_y + \ddot{z}(t)\, \hat{e}_z \\ &= a_x\, \hat{e}_x + a_y\, \hat{e}_y + a_z\, \hat{e}_z \qquad (2.28)\end{aligned}$$

- Zylinder- (und ebene Polar-) Koordinaten, aus (2.14) und (2.3)

$$\begin{aligned}\underline{a}(t) &= (\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)\, \hat{e}_\varrho + (\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi})\, \hat{e}_\varphi + \ddot{z}\, \hat{e}_z \\ &= a_\varrho\, \hat{e}_\varrho + a_\varphi\, \hat{e}_\varphi + a_z\, \hat{e}_z \qquad (2.29)\end{aligned}$$

NB! $a_\varphi = \frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}(\varrho^2\dot{\varphi})$

- Polarkoordinaten:

$$a_r = \ddot{r} + r\dot{\vartheta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta, \quad a_\vartheta = 2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\dot{\varphi}^2\cos\vartheta\sin\vartheta$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\vartheta + r\ddot{\varphi}\sin\vartheta \qquad (2.30)$$

- NB! Basisvektoren sind mit abzuleiten.

  Details: Übungen

2.4.3. Begleitendes Dreibein

- Seien $\hat{t}(s)$ die Tangentenvektoren in der Parametrisierung der Bahnlänge. Dann heißt

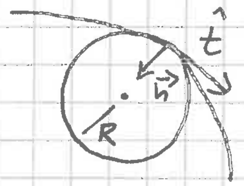
$$\hat{n}(s) := \frac{d\hat{t}}{ds} \Big/ \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right| \qquad (2.31)$$

der Hauptnormalenvektor, $\hat{n} \perp \hat{t}$

Der Vektor $\hat{b}$, der $(\hat{t}, \hat{n})$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis ergänzt heißt der Binormalenvektor von $\underline{r}$ bei s. $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ heißt das begleitende Dreibein der Kurve. $(\hat{t}, \hat{n})$ spannen die "Schmiegt-" (oskulierende) Ebene auf.

- Es gelten die Frenetschen Formeln $\left(' = \frac{d}{ds} \right)$:

$$\begin{aligned} \hat{t}' &= \varkappa \hat{n} \\ \hat{n}' &= -\varkappa \hat{t} + \tau \hat{b} \\ \hat{b}' &= -\tau \hat{n} \end{aligned} \qquad (2.32)$$



mit der Krümmung $\varkappa = \frac{1}{R}$ und der Torsion τ.

- In der Zeitparametrisierung folgt $\left(\dot{} = \frac{d}{dt} \right)$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{t}} &= v \varkappa \hat{n} = \frac{v}{R} \hat{n} \\ \dot{\hat{n}} &= -v \varkappa \hat{t} + v \tau \hat{b} \\ \dot{\hat{b}} &= -v \tau \hat{n} \end{aligned} \qquad (2.33)$$

- Also gilt für die Beschleunigung

$$\underline{a} = (v\hat{t})^{\cdot} = \dot{v}\hat{t} + v\dot{\hat{t}} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{R}\hat{n} = a_t \hat{t} + a_n \hat{n} \qquad (2.34)$$

d.h. $\underline{a}$ liegt in der Schmiegebene,

$a_t = \dot{v}$ heißt Tangenzial- oder Bahnbeschleunigung

$a_n = \frac{v^2}{R}$ heißt Normal- oder Zentripetalbeschleunigung

- Ferner gilt:

$$\varkappa(t) = \frac{|\underline{v} \times \underline{a}|}{|\underline{v}|^3} \qquad (2.35)$$

$$\tau(t) = \frac{\det[\underline{v}, \underline{a}, \dot{\underline{a}}]}{|\underline{a} \times \dot{\underline{a}}|^2} \qquad (2.36)$$