• Dann konvergiert das Integral

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\lambda}^{+\lambda} dk\, g(k)\, e^{i\alpha k x} \quad , \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$$

nach der quadratischen Norm gegen eine quadratintegrable Funktion

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1} g(k) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} dk\, g(k)\, e^{i\alpha k x} \qquad (2.18a)$$

• Diese Beziehung ist umkehrbar in dem Sinne, dass

$$g(k) = \mathcal{F} f(x) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \lim_{\xi \to \infty} \int_{-\xi}^{\xi} dx\, f(x)\, e^{-i\alpha k x} \qquad (2.18b)$$

• Konvergenz $\lim\limits_{\lambda \to \Lambda} \Phi(k,\lambda) = \Phi(k)$ im Sinne der quadratischen Norm heißt:

$$\lim_{\lambda \to \Lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, |\Phi(k,\lambda) - \Phi(k)|^2 = 0$$

• Satz von Parseval

Die Fouriertransformation erhält das „innere Produkt", d.h. wenn $g_1(k) = \mathcal{F} f_1(x)$ und $g_2(k) = \mathcal{F} f_2(x)$,

dann ist $\langle f_1 | f_2 \rangle = \langle g_1 | g_2 \rangle$ im Sinne, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f_1^*(x)\, f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, g_1^*(k)\, g_2(k) \qquad (2.19a)$$

• Spezialfall: Die Fouriertransformation erhält die quadratische Norm

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, |g(k)|^2 \qquad (2.19b)$$

• Setze $\alpha = \frac{1}{\hbar}$, schreibe p statt k, so folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= (2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, g(p)\, e^{ipx/\hbar} \qquad &(2.20a) \\ g(p) &= (2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, e^{-ipx/\hbar} \qquad &(2.20b) \end{aligned}}$$

d) Zurück zum Gaußwellenpaket

• Es ist $\psi(x) := \psi(x, t=0)$ die Fouriertransformierte von $\varphi(p)$ im Sinne von (2.20):

$$\psi(x) = (2\pi\hbar)^{-1/2}\, \pi^{-1/4} (\delta p)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \exp\left\{-\frac{(p-p_0)^2}{2(\delta p)^2}\right\} e^{ipx/\hbar} =$$

$$= \pi^{-1/4}\, \hbar^{-1/2} (\delta p)^{1/2}\, e^{ip_0 x/\hbar}\, e^{-(\delta p)^2 x^2/2\hbar^2} \qquad (2.21)$$

$$\left(\text{Mit } \int_{-\infty}^{+\infty} du\, e^{-\alpha u^2} e^{-\beta u} = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{\beta^2/4\alpha}\right)$$

• Setze $\delta x := \frac{\hbar}{\delta p}$ (2.22), so ist:

$$\psi(x) = \pi^{-1/4} (\delta x)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(\delta x)^2}\right\} e^{ip_0 x/\hbar} \qquad (2.23)$$

$$\text{Vgl. } \varphi(p) \overset{(2.13)}{\underset{(2.16)}{=}} \pi^{-1/4} (\delta p)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(p-p_0)}{2(\delta p)^2}\right\}$$

c) Normierung und Standardabweichung

•

c) Normierung und Standardabweichung

- Betrachte $|\varphi(p)|^2$ als eine Wahrscheinlichkeitsdichte für die Verteilung von Impulsen.
- Schwerpunkt der Verteilung oder erstes Moment:

$$\langle p\rangle_{|\varphi|^2} := \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, p\, |\varphi(p)|^2 \underset{\text{Symmetrie}}{\overset{(2.13)}{=}} p_0 \qquad (2.24)$$

- Die
  - Breite oder
  - die Wurzel aus dem Schwankungsquadrat oder
  - die Streuung oder
  - die Wurzel aus dem mittleren quadratischen Fehler

ist

$$\Delta p := \langle (p - \langle p\rangle)^2 \rangle^{1/2}_{|\varphi|^2} =$$

$$= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, (p-p_0)^2\, |\varphi(p)|^2 \right\}^{1/2} =$$

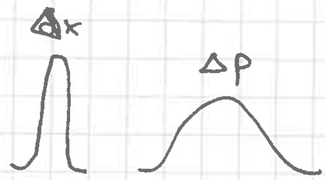
$$\overset{(2.13)}{\underset{(2.16)}{=}} \left\{ \pi^{-1/2} (\delta p)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, (p-p_0)^2\, e^{-[(p-p_0)/\delta p]^2} \right\}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \delta p \qquad (2.25)$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, y^2 e^{-y^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$$

- Betrachte $|\psi(x)|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte für den Aufenthalt, also die Verteilung von Orten:
- $|\psi(x)|^2$ ist normiert auf 1
- $\langle x \rangle_{|\psi|^2} = 0 \qquad (2.26)$
- $\Delta x := \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle_{|\psi|^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \delta x \qquad (2.27)$

• Es gilt mit (2.22) und (2.25) die Unschärferelation

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}} \qquad (2.28)$$



• Im Grenzfall $\Delta p \to 0$ erhält man wieder einen Zustand mit scharfem Impuls p_0, d.h. eine einzige ebene Welle. Weil dann $\Delta x \to \infty$, ist diese nicht mehr auf 1 normierbar.

2.3.3. Zeitentwicklung des Gaußwellenpakets

a) Form

• Mit der Definition (2.12), der Energie $E(p) = \frac{p^2}{2m}$, der Einhüllenden (2.13), (2.16) folgt:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \pi^{-1/4} (\delta p)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(p-p_0)^2}{2(\delta p)^2}\right\} \exp\left\{i\left(px - \frac{p^2 t}{2m}\right)/\hbar\right\} =$$

$$= \pi^{-1/4} \left\{\frac{\delta p/\hbar}{1+i(\delta p)^2 t/m\hbar}\right\}^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{i p_0 x/\hbar - (\delta p/\hbar)^2 x^2/2 + i p_0^2 t/2m\hbar}{1+i(\delta p)^2 t/m\hbar}\right\} \qquad (2.29)$$

• Für die Wahrscheinlichkeitsdichte gilt:

$$P(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = \pi^{-1/2} \frac{\delta p/\hbar}{\{1+(\delta p)^4 t^2/m^2\hbar^2\}^{1/2}}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{(\delta p/\hbar)^2 (x - v_g t)^2}{1+(\delta p)^4 t^2/m^2\hbar^2}\right\} \qquad (2.30)$$

- Dies ist ein Gaußwellenpaket, dessen Schwerpunkt sich mit der Geschwindigkeit

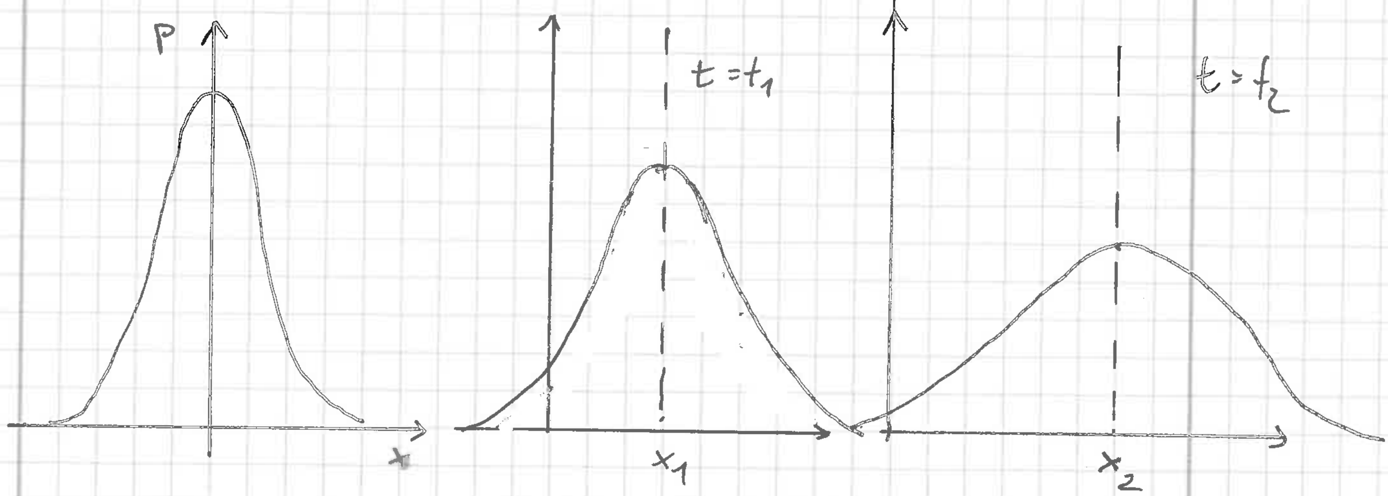
$$v_g = \frac{p_0}{m} \qquad (2.31)$$

gleichförmig bewegt.

- Die Breite ist

$$\Delta x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\delta p} \left\{ 1 + \frac{(\delta p)^4}{m^2 \hbar^2} t^2 \right\}^{1/2} \qquad (2.32)$$

und nimmt mit der Zeit zu.

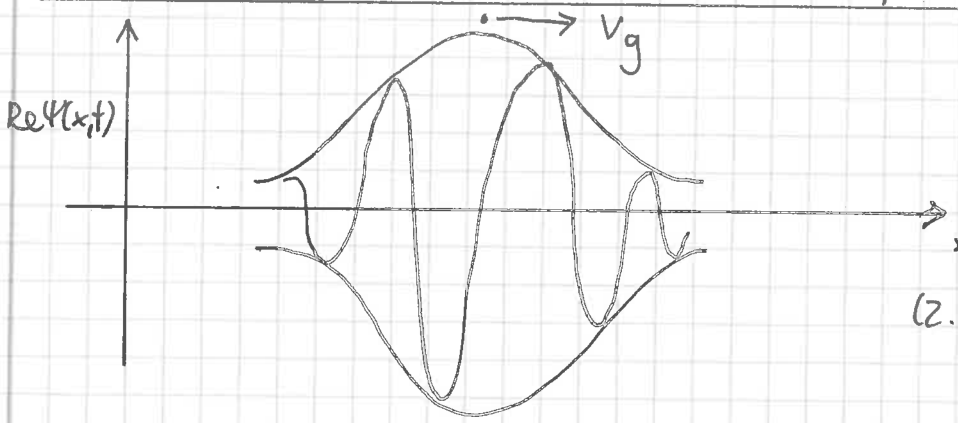


- Das Paket „zerfließt"

b) Beispiel

- Elektronen $\Delta x = 10^{-10}$ m bei $t = 0$, Δp?
  $2\Delta x$ ist erreicht nach 10^{-16} s
- Masse von 1g, $\Delta x = 10^{-6}$ m bei $t = 0$, Δp?
  $2\Delta x$ ist erreicht nach 10^{19} s !

c) Verhalten der Wahrscheinlichkeitsamplitude

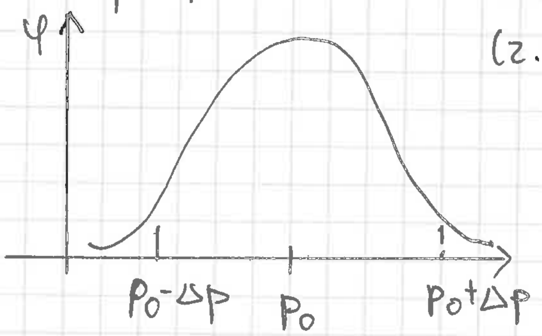


(2.34)

2.4. Wellenpakete allgemein

2.4.1. Voraussetzung

- Sei $\varphi(p)$ eine um $p=p_0$ „Konzentrierte" reelle Funktion, die außerhalb das Intervalls $(p_0-\Delta p, p_0+\Delta p)$ rasch zu Null abfällt:



(2.35)

- Schreibe die Wellenfunktion im Ortsraum als

$$\Psi(x,t) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \varphi(p)\, e^{i\beta(p)/\hbar} \qquad (2.36)$$

mit $\beta(p) = px - E(p)\,t \qquad (2.37)$

2.4.2. Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

- $|\Psi(x,t)|^2$ ist am größten für solche x, für die $\beta(p)$ nahezu konstant ist bei $p=p_0$