- Beweis

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\underline{r},t) = \sum_n c_n \, i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n(\underline{r},t) = \sum_n c_n E_n e^{-iE_n t/\hbar} \psi_n(\underline{r}) =$$

$$= \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} H \psi_n(\underline{r}) = H \sum_n c_n \Psi_n(\underline{r},t) = H \Psi_n(\underline{r},t) \qquad (3.90)$$

3.7. Physikalische Bedeutung der Eigenwerte

3.7.1. Operatoren mit diskreten Eigenwerten

- Das Teilchen befinde sich im Zustand

$$\psi(\underline{r}) = \sum_m c_m \psi_m(\underline{r})$$

$$(3.91)$$

mit $\quad c_m = \langle \psi_m | \psi \rangle$

und ψ_m Eigenzustand zur Observablen

- Als mögliche Messwerte der Observablen A kommen nur die Eigenwerte a_m in Frage!
- Sie treten mit Wahrscheinlichkeit $|c_m|^2$ auf
  $\left(\sum_m |c_m|^2 = \langle 1 \rangle = 1 \right)$.
- Ist $\psi = \psi_m$ ein Eigenvektor, so misst man a_m mit Wahrscheinlichkeit 1 („scharf", vgl 3.44b))
- Das Ergebnis ist zeitunabhängig (gleich für c_m oder $c_m e^{-iE_m t/\hbar}$).
- Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$w(a) = \sum_m |c_m|^2 \delta(a - a_m) \qquad (3.92)$$

3.7.2. Operatoren mit kontinuierlichem Spektrum / Eigenwerten

a) Impulseigenfunktionen

$$\psi(x) = \int dp\, \varphi_p(x) \langle \varphi_p | \psi \rangle = \int dp\, \varphi(p)\, (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{ipx/\hbar} \quad (3.93)$$

also $\varphi(p) = \langle \varphi_p | \psi \rangle$ 3.94)

- Vgl. mit diskretem Spektrum:

$$\sum_m c_m \longrightarrow \int dp'\, \varphi(p') \quad (3.95)$$

- Wahrscheinlichkeitsdichte des Impulses

$$w(p) = |\varphi(p)|^2 = |\langle \varphi_p | \psi \rangle|^2 \quad (3.96)$$
$$= \int dp'\, |\varphi(p)|^2 \delta(p-p')$$

b) Ortseigenfunktionen

$$\psi(x) = \int da\, \psi(a)\, \delta_a(x)$$

$$(3.97)$$

also $\psi(a) = \langle \delta_a | \psi \rangle$

- Wahrscheinlichkeitsdichte des Ortes.

$$w(x) = |\psi(a)|^2 = |\langle \delta_a | \psi \rangle|^2 \quad (3.98)$$

3.7.3. Gemischte Spektren

- Oft besitzt das Spektrum eines Operators A einen diskreten Anteil (a_n, ψ_n) und einen kontinuierlichen $(c(a), \psi_a)$
- Spektrale Entwicklung und Wahrscheinlichkeitsdichte ist Summe beider Beiträge.

3.7.4 Zum Messprozess

- Nach „idealer Messung" mit Eigenwert a_m befindet sich das System im Zustand ψ_m

- Beispiel Ortsmessung: „Kollaps der Wellenfunktion zu $\delta_a(x)$"

- Ausmessen der Wellenfunktion:
  N identische Systeme herstellen. Wenn n_m-mal a_m gemessen wird, so ist

$$|c_m|^2 = \lim_{N\to\infty} n_m/N \qquad (3.99)$$

3.7.5) Kommutierende Observable

a) Kompatible Observable

- Zwei Observable A, B heißen kompatibel, wenn es eine vollständige ONB $\{\psi_n\}$ gibt, derart, dass jedes Element davon gleichzeitig Eigenvektor von A und B ist: $A\psi_n = a_n\psi_n$, $B\psi_n = b_n\psi_n$

- Die Messung von A ergibt den scharfen Wert a_n, von B gleichzeitig b_n

- Folgt:

$$AB = BA \,, \text{ d.h. } [A,B]=0 \qquad (3.100)$$

b) Kommutierende Observable besitzen einen vollständigen Satz gemeinsamer Eigenfunktionen

- Sei $A, B, C, \dots$ ein Satz kommutierender Observabler. Dann besitzen diese einen vollständigen Satz gemeinsamer Eigenfunktionen $\{ \psi_{a_n b_n c_n} \}$
- Wenn die Eigenräume zu $a_n, b_n, c_n, \dots$ nicht mehr entartet sind, so bilden $A, B, C, \dots$ einen vollständigen Satz kommutierender Observabler.
- Der quantenmechanische Zustand ist dann durch die Quantenzahlen $a_n, b_n, c_n, \dots$ eindeutig bestimmt.
- Beispiel H-Atom <später> : $H, \underline{\ell}^2, \ell_z$ mit $\underline{\ell} = \underline{r} \times \underline{p}$ bilden vSKO mit Quantenzahlen n, ℓ, m

3.8. Unschärfe relation allgemein

- Seien A, B Operatoren zu Observablen.
- Unschärfe in der Messung nach (2.45)

$$\Delta A = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle^{1/2} =$$

$$= (\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2)^{1/2} \qquad (3.101)$$

ebenso ΔB.

- Es folgt

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle | \qquad (3.102)$$

- Spezialfall x, p mit $[x, p] = i\hbar$

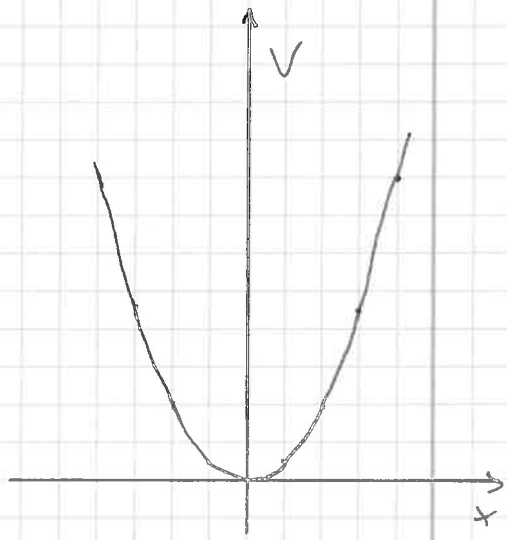
$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (3.103)$$

- Observable zu nichtkommutierenden Observablen können simultan ~~nicht beliebig~~ nicht beliebig scharf gemessen werden.

4. Eindimensionale Probleme

4.1. Der harmonische Oszillator

4.1.1. Stationäre Zustände



a) Hamiltonoperator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad (4.1)$$

• Stationäre Schrödingergleichung:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right\} \psi(x) = E\psi(x) \qquad (4.2)$$

b) Umschreibung mit Besetzungszahloperatoren

• H ist von der Form

$$a^2 + b^2 = (a-ib)(a+ib) + i[a,b],$$

also symmetrisch in p und x <Achtung bei Operatoren!>

• Definiere den nicht hermiteschen Operator a als

$$a := \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2\omega m\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{x}{x_0} + x_0 \frac{d}{dx} \right\} \qquad (4.3a)$$

$$\Rightarrow \quad a^+ := \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2\omega m\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{x}{x_0} - x_0 \frac{d}{dx_0} \right\} \qquad (4.3b)$$

mit charakteristischer Länge $\quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad (4.4)$

• Umkehrung:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^+) = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a + a^+) \qquad (4.5a)$$

$$p = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}\,(a - a^+) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(a - a^+) \qquad (4.5b)$$

• Es gilt für den Kommutator:

$$[a,a^+] = aa^+ - a^+a = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{x_0} + x_0\frac{d}{dx}, \frac{x}{x_0} - x_0\frac{d}{dx}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x, -\frac{d}{dx}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}, x\right] = 1 \qquad (4.6)$$

• Für den Hamiltonoperator folgt:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega(a^+a + aa^+) \overset{(4.6)}{=} \frac{1}{2}\hbar\omega\,(2a^+a + [a,a^+])$$

$$\boxed{H = \hbar\omega\,(a^+a + \tfrac{1}{2})} \qquad (4.7)$$

• Das Eigenwertproblem ist zu lösen für den „Besetzungszahloperator"

$a^+a =: N \quad (4.8)$

$$N\psi_\nu = \nu\,\psi_\nu \qquad (4.9)$$

26.1.

c) Grundzustandswellenfunktion

• Aus $\nu\langle\psi_\nu|\psi_\nu\rangle = \langle\psi_\nu|a^+a\psi_\nu\rangle = \langle a\psi_\nu|a\psi_\nu\rangle \geq 0 \quad (4.10)$

folgt $\nu \geq 0$. Niedrigstmöglicher Energiewert: $\nu = 0$

• Für beliebige ψ_ν gilt:

$$Na\psi_\nu = a^+aa\psi_\nu = (aa^+ - 1)\,a\psi_\nu = (\nu-1)\,a\psi_\nu \qquad (4.11a)$$

d.h. a senkt den Eigenwert um 1:

$$a\psi_\nu \propto \psi_{\nu-1} \qquad (4.11b)$$

• Da ν nicht unter 0 sinken darf, muss die Sequenz (4.11b) für $0 \leq \tilde{\nu} < 1$ abbrechen: $a\psi_{\tilde{\nu}} = 0$