- Wegen (4.10) ist dann aber $\tilde{\nu} = 0$

- Der Grundzustand errechnet sich aus

$$a\,\psi_0 = 0 \quad , \text{ d.h. mit (4.3a):}$$

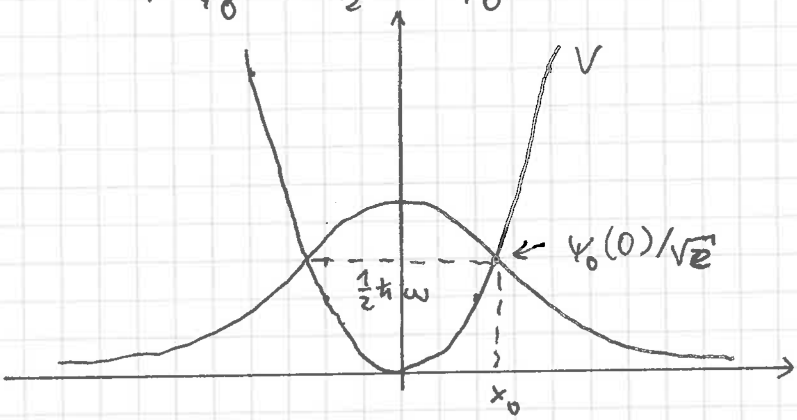
$$\left\{ \frac{d}{dx} + \frac{x}{x_0^2} \right\} \psi_0 = 0 \qquad (4.12)$$

- Auf 1 normierte Lösung:

$$\boxed{\psi_0(x) = \pi^{-1/4}\, x_0^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \right\}} \qquad (4.13)$$

- Gaußfunktion (2.13), (2.16) mit Breite $\delta x = x_0$

$$H\,\psi_0 \overset{(4.7)}{=} \frac{1}{2}\hbar\omega\,\psi_0$$



d) <u>Berechnung der übrigen Eigenfunktionen</u>

- Es gilt:

! $$[N, a^+] \overset{(4.8)}{=} [a^+a, a^+] = a^+[a, a^+] + [a^+, a^+]a \overset{(4.6)}{=} a^+ \qquad (4.15a)$$

$$[N, a] = a^+[a, a] + [a^+, a]a = -a \qquad (4.15b)$$

- $a^+\psi_\nu$ ist Eigenfunktion zum Eigenwert $\nu + 1$:

$$N a^+ \psi_\nu \overset{(4.15a)}{=} (a^+ N + a^+)\psi_\nu = (\nu + 1)\, a^+ \psi_\nu \qquad (4.16)$$

- Norm: $\langle a^+\psi_\nu | a^+\psi_\nu\rangle = \langle \psi_\nu | a a^+ \psi_\nu\rangle =$

$$\overset{(4.6)}{=} \langle \psi_\nu | (a^+a+1)\psi_\nu\rangle = (\nu+1)\langle\psi_\nu|\psi_\nu\rangle \qquad (4.17)$$

$$\Rightarrow \quad \psi_{\nu+1} = \frac{1}{\sqrt{\nu+1}}\, a^+\psi_\nu \qquad (4.18)$$

- Folgt:

$$\boxed{\psi_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu}}\, a^+\psi_{\nu-1} = \dots = \frac{1}{\sqrt{\nu!}}(a^+)^\nu \psi_0} \qquad (4.19)$$

! - Ähnlich gilt:

$$\boxed{\psi_{\nu-1} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}\, a\,\psi_\nu} \qquad (4.20)$$

- a^+ und a: Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperator.
„Leiteroperatoren".

- Die Energieeigenzustände des harmonischen Oszillators lauten demnach:

$$\psi_\nu(x) \underset{(4.19)}{\overset{(4.13)}{=}} \frac{1}{\sqrt{x_0\nu!}}\, \pi^{-1/4}(a^+)^\nu \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right\} \qquad (4.21)$$

bzw. mit a^+ aus (4.3b):

$$\boxed{\psi_\nu(x) = \left\{2^\nu \nu!\, \pi^{1/2} x_0\right\}^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right\} H_\nu\left(\frac{x}{x_0}\right)} \qquad (4.22)$$

mit den „Hermitepolynomen" H_ν (s.u.) und den Energieeigenwerten

$$\boxed{E_\nu = \hbar\omega\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \qquad (4.23)$$

- NB! Dimension der Wellenfunktion: $\ell^{-1/2}$

- OB: Mit ψ_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ sind alle Eigenfunktionen gefunden.

- Die Nullpunktsenergie ist der kleinste mit der Unschärfe-relation vereinbare Eigenwert.

d) Hermitepolynome

- Sind mit (4.21) und (4.22) gegeben durch:

$$H_\nu(x) = e^{x^2/2} \left(\sqrt{2}\, a^+\right)^\nu \Big|_{x_0=1} e^{-x^2/2} =$$

$$= e^{x^2} e^{-x^2/2} \left(x - \frac{d}{dx}\right) e^{x^2/2} e^{-x^2} \qquad (4.24)$$

- Mit (oB)

$$e^{-x^2/2} \left(x - \frac{d}{dx}\right) e^{x^2/2} = -\frac{d}{dx} \qquad (4.25)$$

und (rekursiv)

$$e^{-x^2/2} \left(x - \frac{d}{dx}\right)^\nu e^{x^2/2} = (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dx^\nu} \qquad (4.26)$$

folgt:

$$\boxed{H_\nu(x) = (-1)^\nu e^{x^2} \frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{-x^2}} \qquad (4.27)$$

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ &\ldots \end{aligned} \qquad (4.28)$$

- H_ν hat ν „Knoten" (Nullstellen) und damit auch φ_ν

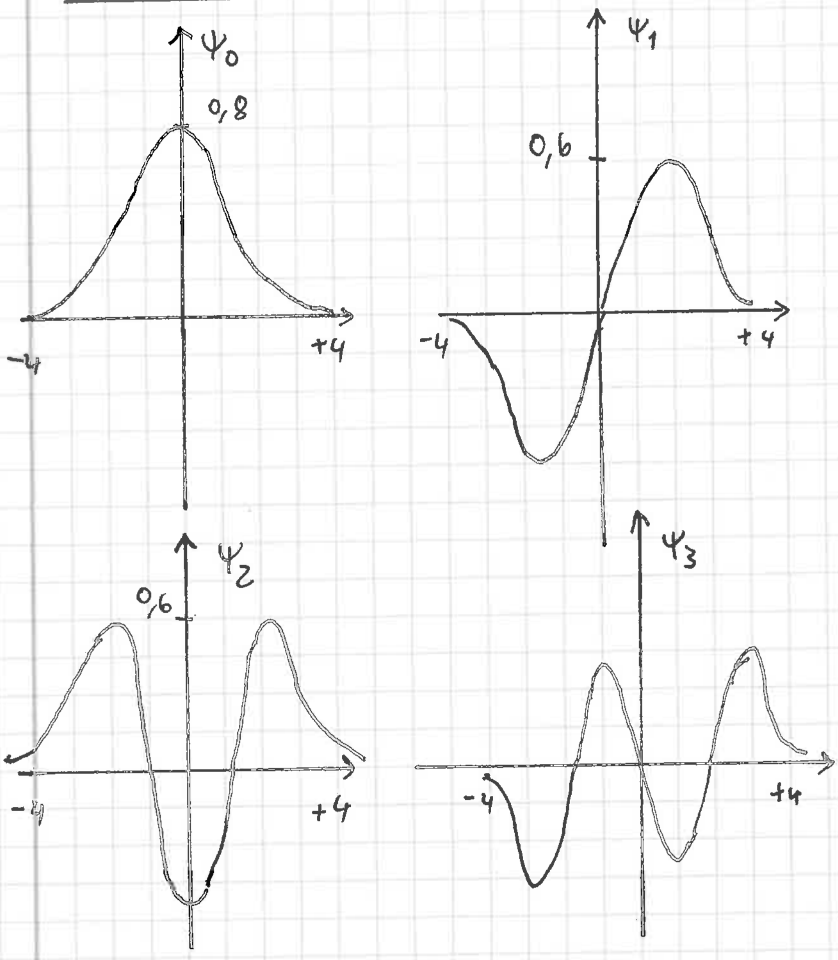
- Aus der Orthogonalität der φ_ν (4.22) folgt Orthogonalität

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} H_\nu(x) H_\mu(x) = \sqrt{\pi}\, 2^\nu \nu!\, \delta_{\mu\nu} \qquad (4.29)$$

- Vollständigkeit o B

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu(x)\, \psi_\nu(x') = \delta(x-x') \qquad (4.30)$$

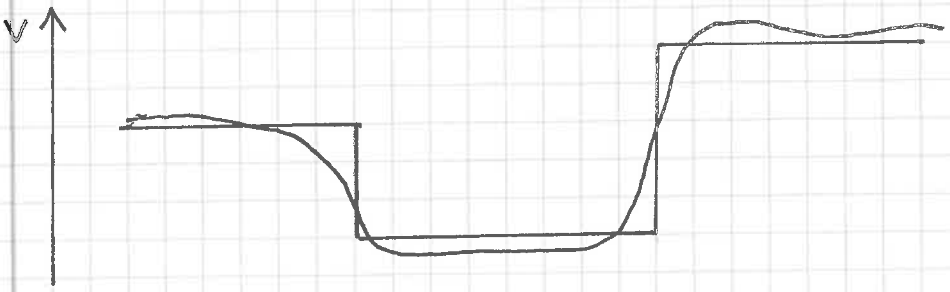
e) Die niedrigsten stationären Zustände



- Beachte: ν Knoten
- Symmetrie: $\varphi_\nu(-x) = (-1)^\nu \varphi_\nu(x)$ (4.32)

4.2. Potenzialstufe

- Oft (Kern; Festkörperphysik): Potenziale nahezu konstant über weite Strecken, dann rasche Änderungen:

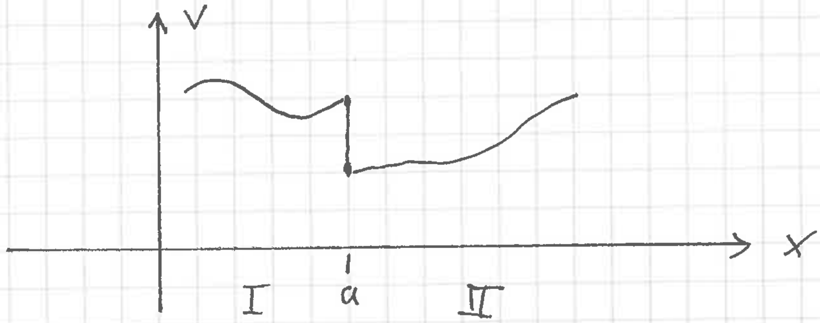


- Idealisierung: Potenzialstufe

4.2.1. Verhalten von ψ und ψ' an endlicher Sprungstelle des Potenzials

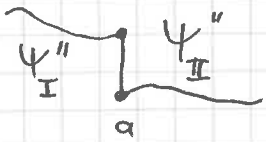
- Zeitunabhängige Schrödingergleichung:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}\{E - V(x)\}\,\psi(x) \qquad (4.33)$$

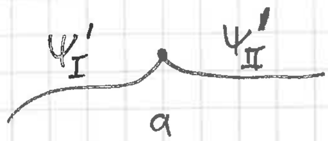


Siehe auch 3.2.3

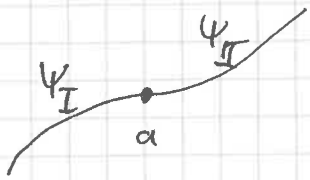
- ψ'' zeigt endlichen Sprung:



- ψ' zeigt einen Knick, bleibt aber stetig



- ψ ist stetig und diff'bar



- Anschlussbedingungen an der Sprungstelle

$$\psi_I(a) = \psi_{II}(a) \qquad (4.34a)$$

$$\psi_I'(a) = \psi_{II}'(a) \qquad (4.34b)$$

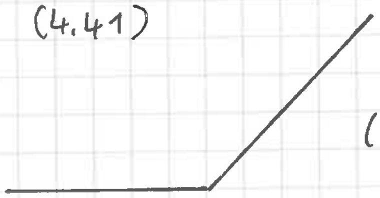
bzw. $$\frac{\psi_I'(a)}{\psi_I(a)} = (\ln \psi_I)'(a) = \frac{\psi_{II}'(a)}{\psi_{II}(a)} = (\ln \psi_{II})'(a) \qquad (4.34c)$$

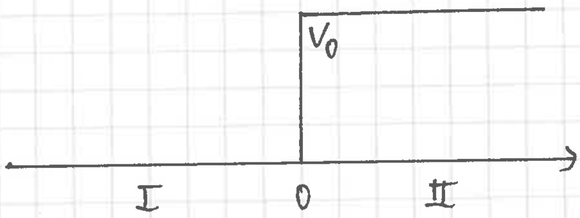
- 4.2.2. Die Potenzialstufe

- $V(x) = V_0 \Theta(x), \; V_0 \geq 0 \qquad (4.35)$

$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad (4.36)$$

$$\Theta'(x) = \delta(x) \qquad (4.41)$$

$\int \Theta(x)\,dx =$  (4.37)



- Betrachte Schrödingergleichung gesondert in I ($x<0$) und II ($x>0$):

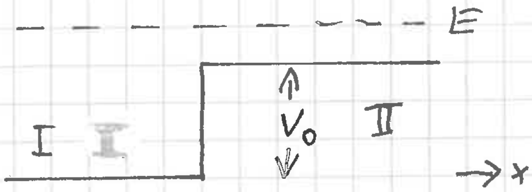
$$\text{I}: \quad \psi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi \qquad (4.38a)$$

$$\text{II}: \quad \psi'' = -\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\psi \qquad (4.38b)$$

und bestimme die freien Konstanten in den Lösungen ψ_I, ψ_{II} aus den Anfangsbedingungen (4.34)

• Unterscheide $E > V_0$ und $E < V_0$

a) $\underline{E > V_0}$



• Definiere Wellenzahlen

$$k := \sqrt{2mE}/\hbar, \quad q := \sqrt{2m(E-V)}/\hbar \qquad (4.39)$$

• Ungebundene Lösungen: Keine Einschränkung an E.

• Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I}: \quad & \psi_{\mathrm{I}}'' = -k^2 \psi_{\mathrm{I}} \\ \mathrm{II}: \quad & \psi_{\mathrm{II}}' = -q^2 \psi_{\mathrm{II}} \end{aligned}\right\} \quad (4.40)$$

• Basislösungen: e^{iKx}, e^{-iKx}, $K \in \{k, q\}$

• Teilchen falle von links mit (oBdA) Amplitude 1 ein, werden z.T. reflektiert und gehe zT durch:

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = e^{ikx} + R\, e^{-ikx} \qquad (4.41a)$$

$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = T e^{iqx} \qquad (4.41b)$$

$$\psi(x) = \Theta(-x)\, \psi_{\mathrm{I}}(x) + \Theta(x)\, \psi_{\mathrm{II}}(x) \qquad (4.41c)$$

• Stetigkeitsbedingung für ψ und ψ' bei $x = 0$:

$$1 + R = T, \quad ik(1-R) = iqT \qquad (4.42)$$

• Folgt: $R = \dfrac{k-q}{k+q}$, $T = \dfrac{2k}{k+q}$ $\qquad (4.43)$

• Wahrscheinlichkeitsstromdichte (3.33)

$$j_{I}(x) = \frac{\hbar}{2mi}\{\psi^*\psi' - \psi^{*\prime}\psi\} = \frac{\hbar k}{m}(1-|R|^2) = j_{ein} - j_{refl} \quad (4.44a)$$

$$j_{II}(x) \underset{(3.33)}{\overset{(4.41b)}{=}} \frac{\hbar q}{m}|T|^2 = j_{trans} \quad (4.44b)$$

• Reflexionskoeffizient $r = \frac{j_{refl}}{j_{ein}} = |R|^2$ (4.45a)

• Transmissionskoeffizient $t = \frac{j_{trans}}{j_{ein}} = \frac{q}{k}|T|^2$ (4.45b)

Anmerkungen

• $t + r \underset{(4.45)}{\overset{(4.43)}{=}} 1$, $j_{ein} = j_{refl} + j_{trans}$

• Reflexion mit Wahrscheinlichkeit r

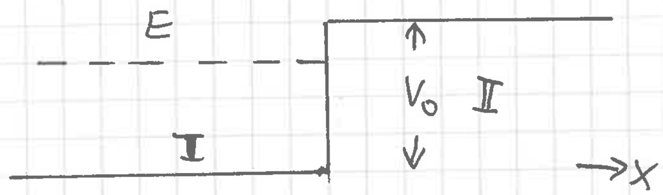
• Klassisch: Keine Reflexion!

• QM: Wellenphänomene, entspricht Lichtreflexion an der Grenzfläche von Medien mit verschiedenen Brechungsindizes

• Teilchenzahlerhaltung: $j' = 0$.

30.1.

b) $E < V_0$



I: unverändert

II: $q = i\varkappa$ mit $\varkappa = \pm\sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ (4.46)

• Nur „+" führt zu endlicher Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\psi_{II}(x) = T e^{-\varkappa x} \quad (4.47)$$

• Folgt für R und T:

$$R = \frac{k - i\varkappa}{k + i\varkappa}, \quad T = \frac{2k}{k + i\varkappa} \quad (4.48), \text{ vgl } (4.42)$$