Anmerkungen

- $|R|^2 = 1 = 1$, d.h. vollständige Reflexion
- $j_{II} \overset{\psi_{II}\ \text{reell}}{=} 0$, aber $T \neq 0$: Teilchen dringen bis in Tiefe $\varkappa^{-1}$ ein.

! - $\psi(x) \underset{(4.48)}{\overset{(4.41a)}{=}} \frac{2}{1+\frac{i\varkappa}{k}} \left\{ \left(\cos kx - \frac{\varkappa}{k}\sin kx\right)\Theta(-x) + e^{-\varkappa}\,\Theta(x) \right\}$ (4.49)

c) Unendlich hohe Potenzialschwelle

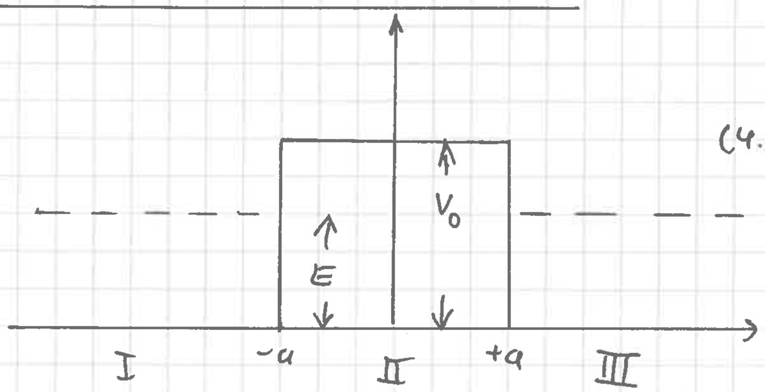
$V_0 \to \infty$: $\varkappa \xrightarrow{(4.46)} \infty$, $T \xrightarrow{(4.48)} 0$, $R \xrightarrow{(4.48)} -1$

$\psi(x) \overset{(4.41a)}{=} e^{ikx} - e^{-ikx}$, $\psi_I(0) = 0$, $\psi_{II} = 0$ (4.50)

- Lösung folgt allgemeiner Randbedingung an unendlich hoher Schwelle: $\psi|_{\text{Schwelle}} = 0$ (4.51)

4.3. Potenzialschwellen und Tunneleffekt

4.3.1. Die Potenzialschwelle



(4.52)

- Nur Fall $E < V_0$ behandelt, Ansätze wie (4.41), (4.46)

- Lösungsansatz:

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & \text{I} \\ C e^{-\varkappa x} + D e^{+\varkappa x} & \text{II} \\ F e^{ikx} + G e^{-ikx} & \text{III} \end{cases} \quad (4.53)$$

- $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $\varkappa = \sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar$ (4.40), (4.46)

a) Anschlussbedingungen bei $x = -a$ (wie (4.41), (4.42))

$$A e^{-ika} + B e^{ika} = C e^{\varkappa a} + D e^{-\varkappa a} \quad (4.54a)$$

$$ik(A e^{-ika} - B e^{ika}) = -\varkappa (C e^{\varkappa a} - D e^{-\varkappa a}) \quad (4.54b)$$

- In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} e^{-ika} & e^{ika} \\ e^{-ika} & e^{ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\varkappa a} & e^{-\varkappa a} \\ \frac{i\varkappa}{k} e^{\varkappa a} & -\frac{i\varkappa}{k} e^{-\varkappa a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

$$? \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{ika} & e^{ika} \\ e^{-ika} & -e^{-ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\varkappa a} & e^{-\varkappa a} \\ \frac{i\varkappa}{k} e^{\varkappa a} & -\frac{i\varkappa}{k} e^{-\varkappa a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M(a) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$, mit „Transfermatrizen"

$$M(a) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{i\varkappa}{k}\right) e^{\varkappa a + ika} & \left(1 - \frac{i\varkappa}{k}\right) e^{-\varkappa a + ika} \\ \left(1 - \frac{i\varkappa}{k}\right) e^{\varkappa a - ika} & \left(1 + \frac{i\varkappa}{k}\right) e^{-\varkappa a - ika} \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

b) Anschlussbedingungen bei $x = +a$:

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = M(-a) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

c) Transfer

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M(a)\, M(-a)^{-1} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

• Mit

! $$M(-a)^{-1} = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{ik}{\varkappa}\right)e^{\varkappa a + ika} & \left(1+\frac{ik}{\varkappa}\right)e^{\varkappa a - ika} \\ \left(1+\frac{ik}{\varkappa}\right)e^{-\varkappa a + ika} & \left(1-\frac{ik}{\varkappa}\right)e^{-\varkappa a - ika} \end{pmatrix} \qquad (4.60)$$

• folgt:

! $$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\cosh 2\varkappa a + \frac{i\varepsilon}{2}\sinh 2\varkappa a\right)e^{2ika} & \frac{i\eta}{2}\sinh 2\varkappa a \\ -\frac{i\eta}{2}\sinh 2\varkappa a & \left(\cosh 2\varkappa a - \frac{i\varepsilon}{2}\sinh 2\varkappa a\right)e^{-2ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \qquad (4.61)$$

mit
$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\varkappa}{k} - \frac{k}{\varkappa} \\ \eta &= \frac{\varkappa}{k} + \frac{k}{\varkappa} \end{aligned}\right\} \qquad (4.62)$$

4.3.2. Tunneleffekt

• Spezialisierung: Von links einlaufendes Teilchen, d.h. $G = 0$,

Aus (4.61):

$$\left.\begin{aligned} A &= F\left\{\cosh 2\varkappa a + \frac{i\varepsilon}{2}\sinh 2\varkappa a\right\}e^{2ika} \\ B &= F\left(-\frac{i\eta}{2}\right)\sinh 2\varkappa a \end{aligned}\right\} \qquad (4.63)$$

• Definiere „Transmissionsamplitude"

$$S(E) = \frac{F}{A} = \frac{e^{-2ika}}{\cosh 2\varkappa a + \left(\frac{i\varepsilon}{2}\right)\sinh 2\varkappa a} \qquad (4.64)$$

NB! $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

• „Durchlässigkeit" bzw. „Transmissions Koeffizient"

$$|S(E)|^2 = \left\{1 + \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right)\sinh^2 2\varkappa a\right\}^{-1} \qquad (4.65)$$

- Dies ist die Wahrscheinlichkeit, (>0!), dass das Teilchen die Schwelle durchdringt „Tunneleffekt"

- Umformung bei großer und breiter Barriere:

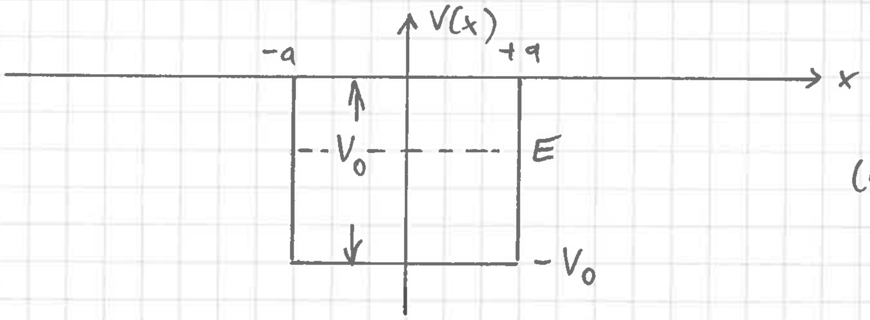
$$\varkappa a \gg 1, \quad \sinh 2\varkappa a \approx \frac{1}{2} e^{2\varkappa a} \gg 1 :$$

$$|S(E)|^2 \approx \exp\left\{-4\sqrt{2m(V_0-E)}\,\frac{a}{\hbar}\right\} \qquad (4.66a)$$

- Faustregel bei Berg $V(x)$:

$$|S(E)|^2 = \exp\left\{-2\int_a^b dx\,\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}\right\} \qquad (4.66b)$$

4.4. Der Potentialtopf



(4.67)

$$V(x) = -V_0\,\Theta(a-|x|) \qquad (4.68)$$

- Betrachte nur $E<0$
- Beispiele: Halbleiterheterostrukturen, Quantenpunkte, Atomkerne

4.4.1. Ansatzfunktionen

- Zu lösen:

$$\left.\begin{aligned} |x|>a: &\quad \psi'' = \varkappa^2\psi \text{ mit } \varkappa = \sqrt{2m(-E)}/\hbar \\ |x|<a: &\quad \psi'' = -q^2\psi \text{ mit } q = \sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar \end{aligned}\right\} \quad (4.68)$$

Anmerkungen

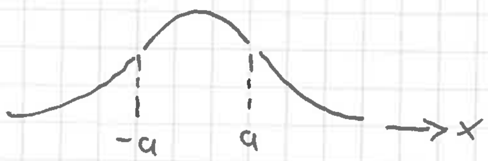
- Wellenfunktionen sind rein reell wählbar (wenn ψ Lösung, so auch ψ^*), also Linear Kombinationen von $e^{\pm \varkappa x}$, $\sin qx$ und $\cos qx$.

- Wellenfunktionen sind gerade oder ungerade wählbar (wenn $\varphi(x)$ Lösung, so auch $\psi(-x)$ und $\frac{1}{2}\{\psi(x) \pm \psi(-x)\}$ wegen $H(x) = H(-x)$.

- Ansätze (bis auf Normierungs Konstanten):

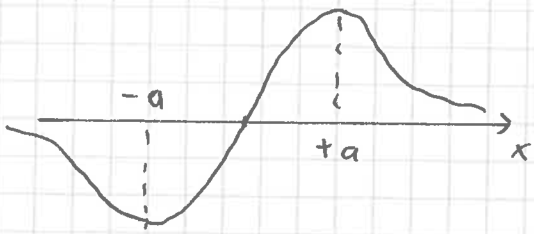
Gerade:

$$\psi(x) \begin{cases} A \cos qx & \text{für } |x|<a \\ e^{\mp \varkappa x} & \text{für } x \gtrless^{+}_{-} a \end{cases} \qquad (4.69)$$



Ungerade:

$$\psi(x) = \begin{cases} A \sin qx & \text{für } |x|<a \\ \pm e^{\mp \varkappa x} & \text{für } x \gtrless^{+}_{-} a \end{cases} \qquad (4.70)$$



4.4.2. Gerade Wellenfunktionen

- Stetigkeitsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} A \cos qa &= e^{-\varkappa a} \\ Aq \sin qa &= \varkappa e^{-\varkappa a} \end{aligned}\right\} \qquad (4.71a)$$

- Durchdividiert:

$$\tan qa = \frac{\varkappa}{q} \qquad (4.71b)$$

- Setze: $\xi := \sqrt{2mV_0}\,\frac{a}{\hbar}$ (dimensionslos) $\quad$ (4.71c)

dann ist:

$$\varkappa a \overset{(4.68)}{=} \sqrt{2m(-E)}\,\frac{a}{\hbar} = \sqrt{2mV_0 - 2m(E+V_0)}\,\frac{a}{\hbar} =$$

$$\overset{(4.68)}{=} \left\{ \xi^2 - (qa)^2 \right\}^{1/2} \qquad (4.71d)$$

und (4.71b) wird zu

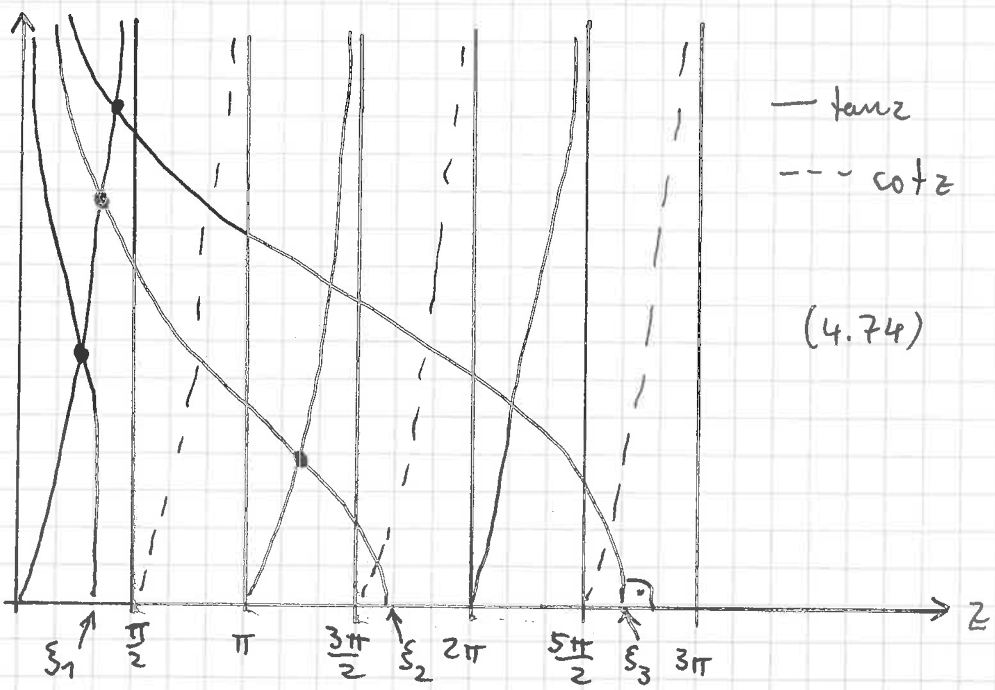
$$\tan qa = \frac{\left\{ \xi^2 - (qa)^2 \right\}^{1/2}}{qa} \qquad (4.72)$$

- Wegen $\quad -V_0 \le E \le 0$ und $0 \le E + V_0 \le V_0$

gilt: $\quad 0 \le qa \le \xi \quad$ (4.73)

d.h. der Bereich für die Wellenzahl ist beschränkt.

- Löse transzendente Gleichung (4.72) grafisch als Schnittpunkte von $\tan z$ und $(\xi^2 - z^2)^{1/2}/z$ für $z = qa$



(4.74)