2.5. Einfache Kinematische Aufgaben

2.5.1. Bewegung des Punktes bekannt, Geschwindigkeit und Beschleunigung gesucht

• z.B. gleichförmige Bewegung auf einem Kreis, in ebenen Polarkoordinaten: $r = R = \text{const}$, $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$.

• Mit (2.2), (2.17) und (2.29) folgt: ($r = \varrho$)

$$\underline{r} = R\,\hat{e}_r \,,\quad \underline{v} = \omega R\,\hat{e}_\varphi \,,\quad \underline{a} = -\omega^2 \underline{r} \qquad (2.37)$$

d.h. $v = \omega R$, $\omega = \frac{v}{R}$

• Ferner ist $\underline{r} = -R\,\hat{n}$, somit $\underline{a} = \frac{v^2}{R}\,\hat{n}$ (2.38)

d.h. es gibt nur eine Zentripetalbeschleunigung

2.5.2. Geschwindigkeit bekannt, Bahn gesucht

a) Allgemein: Gegeben $\underline{v}(\underline{r},t)$, gesucht $\underline{r}(t)$

• Problem ist vektorielle Differenzialgleichung

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v}(\underline{r},t) \qquad (2.39)$$

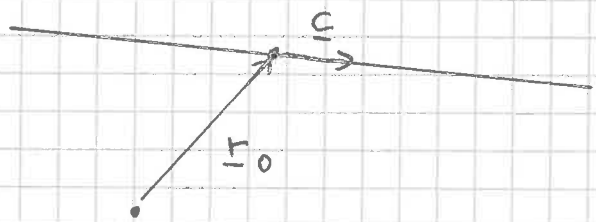
oder System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen erster Ordnung, in Kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x(x,y,z,t) \\ \dot{y} &= v_y(x,y,z,t) \\ \dot{z} &= v_z(x,y,z,t) \end{aligned} \qquad (2.40)$$

• Lösung eindeutig, wenn Anfangsbedingung $\underline{r}(t_0) = \underline{r}_0$ gegeben.

b) Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit

- $\underline{v} = \underline{c} = \text{const}$
- Lösung: $\underline{r}(t) = \underline{c}(t-t_0) + \underline{r}_0$ (2.41)



Geradengleichung

2.5.3. Beschleunigung bekannt, Bahn gesucht

a) Allgemein: Gegeben $\underline{a}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$, gesucht $\underline{r}(t)$

- Problem ist vektorielle Differenzialgleichung oder System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung, in Kartesisches Koordinaten:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= a_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)\\ \ddot{y} &= a_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)\\ \ddot{z} &= a_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)\end{aligned} \qquad (2.42)$$

- Lösung eindeutig, wenn Anfangsbedingungen $\underline{r}_0 := \underline{r}(t_0)$, $\underline{v}_0 := \underline{v}(t_0)$ bekannt.

b) Unbeschleunigte Bewegung

- $\ddot{\underline{r}} = 0$ (2.43)
- Lösung: $\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + \underline{v}_0(t-t_0)$ (2.44)

ist Gleichung für eine Gerade, d.i. eine Geodäte (Bahn geringster Länge zwischen zwei Punkten) im euklidischen Raum.

- Die Minimierung der Bahnlänge führt zur „Geodätengleichung"

- In kartesischen Koordinaten:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0 \qquad (2.45)$$

- In ebenen Polarkoordinaten (2.29), $\varrho = r$:

$a_r = 0, \quad a_\varphi = 0, \quad$ d.h.

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 &= 0 \\ \ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} &= 0 \end{aligned} \qquad (2.46)$$

- In allgemeinen Koordinatensystemen (x_i)

$$\ddot{x}_i + \Gamma^i_{jk}(x_\ell)\, \dot{x}_j \dot{x}_k = 0 \qquad (2.47)$$

c) <u>Konstante Beschleunigung</u>

- $$\underline{\ddot{r}} = \underline{b} = \text{const} \qquad (2.48)$$

- Lösung:

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2}\underline{b}(t - t_0)^2 \qquad (2.49)$$

beschreibt Bewegung in der von $\underline{v}_0$ und $\underline{b}$ aufgespannten Ebene

- Überlagerung einer gleichförmigen und einer geradlinig gleichförmig beschleunigten Bewegung:

  Wurfparabel, Achse parallel zu $\underline{b}$

Axioms or Laws of Motion

From Motte's 1729 translation of Principia

LAW I

Every body perseveres in its state of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed thereon.

LAW II

The alteration of motion is ever proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed.

LAW III

To every action there is always opposed an equal reaction: or the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts.

Axiomata sive Leges Motus

From Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

Lex I

Corpus omne perseverare in statu suo quiscendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Lex II

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Lex III

Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

3. Elementare Newtonsche Mechanik

3.1. Die Newtonschen Gesetze (1687)

I. Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.

II. Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

III. Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich. Oder: Die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

3.2. Interpretation

3.2.1. Das Trägheitsgesetz (I)

- „Körper": zunächst Massepunkt
- „Bewegung": Hier Bahnkurve
- „gleichförmig geradlinig": beschleunigungsfrei

  d.h. $\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t) = 0$ (2.43)

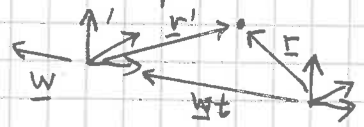
  also $\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 (t - t_0)$
- „Ruhe": $\underline{r}(t) = 0$
- Implizite Voraussetung: Bewegung in E^3, Aufpunkt 0 und Basis $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ „richtig", d.h. unbeschleunigt wählbar, also:

Es existiert ein solches Bezugssystem, in dem sich ein sich selbst überlassener Körper im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig-geradlinigen Bewegung befindet, für den dann also $\underline{a} = 0$ gilt:

- Ein solches Bezugssystem heißt „Inertialsystem"

3.2.2. Satz über Inertialsysteme

Sei I ein Inertialsystem. Jedes relativ zu I mit konstanter Geschwindigkeit $\underline{w}$ bewegte (achsenparallele) Koordinatensystem I' ist ebenfalls Inertialsystem



Beweis: $\underline{r}(t)$ bezgl. I hat in I' die Form $\underline{r}'(t) = \underline{r}(t) - \underline{w}t$

$\underline{w} = \text{const} \Rightarrow \ddot{\underline{r}}'(t) = \ddot{\underline{r}}(t) = 0$

3.2.3. Die Grundgleichung der Dynamik (II)

- „Bewegung" in II: Impuls $\underline{p}(t) = m\dot{\underline{r}}(t)$, d.h. (3.1)

  „träge Masse" mal Geschwindigkeit

- „Impulssatz":

$$\frac{d}{dt}\underline{p}(t) = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \qquad (3.2)$$

- Falls m vom Bewegungszustand unabhängig:

$$m\underline{a}(t) = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \qquad (3.3)$$

- Ursache der Beschleunigung ist Kraft.
- Kraft = Kraft„feld" über $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ggf. zeitabhängig
- Quellen der Kraft: andere Körper und Zusatzeigenschaften des Massenpunktes („schwere Masse", elektrische Ladung, magnetisches Moment, schwache, Farbladung)
- Bedeutung von Satz II: Alle Erscheinungen unter einem Begriff „Kraft" zusammengefasst.