- r.S. Arbeit, gleich Linienintegral der Kraft:

$$A = \int_1^2 \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_1^2 F_s \, ds, \qquad F_s = \underline{F} \cdot \hat{t}$$

$$\overset{KK}{=} \int_1^2 \{ F_x dx + F_y dy + F_z dz \} =$$

$$\overset{\text{Bogenlänge}}{=} \int_1^2 \{ F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds} + F_z \frac{dz}{ds} \} ds =$$

$$\overset{\text{Zeit}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \{ \underline{F}(\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t), t) \cdot \underline{v}(\underline{r}(t), t) \} dt \qquad (3.20)$$

- l.S. Bewegungsenergie oder kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (3.21)$$

- Folgt <u>Satz von der kinetischen Energie</u>

$$T_2 - T_1 = A \qquad (3.22)$$

„Die Zunahme der kinetischen Energie des Massenpunktes ist gleich der Arbeit aller auf den Punkt wirkenden Kräfte"

- Bsp Lorentzkraft:

$$\int_1^2 \underline{F} \cdot d\underline{r} = q \int_1^2 \underline{E} \cdot d\underline{r} + q \underbrace{\int_1^2 (\underline{v} \times \underline{B}) \cdot d\underline{r}}_{0} = -q \Delta U \qquad (3.23)$$

- Bsp: vertikal aufwärts geworfener Körper:

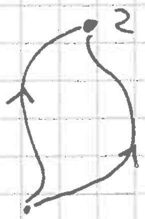
$$\frac{1}{2} m 0^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mgh, \quad h = \frac{v_0^2}{2g} \qquad (3.24)$$

3.5.2 Konservative Kraftfelder

a) Definition

- Ein konservatives Kraftfeld ist ein rein ortsabhängiges Feld $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r})$, das sich als negativer Gradient einer eindeutigen Skalarfunktion $V = V(\underline{r})$, des „Potentials" oder der „potentiellen Energie" darstellen läßt:

$$\underline{F} = -\operatorname{grad} V \qquad (3.25)$$



2

1

- Arbeit bei konservativem Kraftfeld:

$$A = \int_1^2 \underline{F} \cdot d\underline{r} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\underline{r} = -\int_1^2 dV = V_1 - V_2 \qquad (3.26)$$

- A hängt nur von Ausgangs- und Endpunkt ab, nicht vom Weg.

b) Integrabilitätsbedingung

- Ein nur ortsabhängiges Kraftfeld in einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist genau dann konservativ, wenn es keine Wirbel besitzt, d.h. wenn $\operatorname{rot} \underline{F} = \nabla \times \underline{F} = 0$

c) Bemerkungen

- Potential ist nur bis auf eine beliebige Konstante bestimmt

$$\nabla V = \nabla (V + \text{const}) \qquad (3.27)$$

- Wähle also Potentialnullpunkt P_0 frei. Dann gilt:

$$V(P) = -\int_{P_0}^{P} \underline{F} \cdot d\underline{r} = -A\,(P_0 \rightarrow P) \qquad (3.28)$$

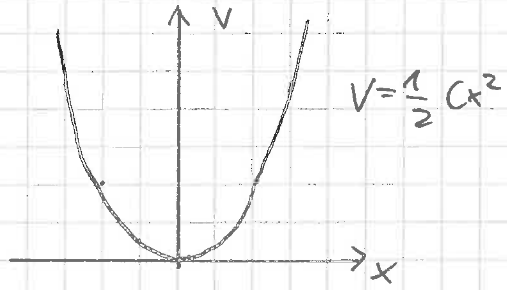
$V(P)$ ist gleich der Arbeit, die gegen die Feldkräfte geleistet werden muss.

- Warum $\underline{F} = „-" \nabla V$?

  Anschauung als „Potenzialtopf" sehr nützlich.

  Bsp harmonischer Oszillator $F_x = -Cx$, $V = \frac{1}{2} Cx^2$ (3.29)

- Beschreibung in 3D durch Äquipotenzialflächen $V(r) = const$
- Kraft steht senkrecht dazu.



[• Fläche beschrieben durch

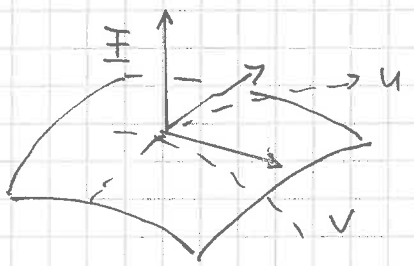
$\{ \underline{r}(u,v) \mid u,v \in \mathbb{R} \}$

d.h. $V(\underline{r}(u,v)) = const$

Dann gilt:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial u} = 0 &= -\frac{\partial V}{\partial \underline{r}} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \\ -\frac{\partial V}{\partial v} = 0 &= -\frac{\partial V}{\partial \underline{r}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}} \end{aligned}\right\}$$

Kraft spannen Tangentialebene auf.



]

3.5.3 Energiesatz

- Aus (3.22) und (3.26) folgt:

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

also: $T_2 + V_2 = T_1 + V_1 =: E = const$ (3.30)

- D.h. $E = \frac{1}{2} m v^2 + V(\underline{r})$ (3.31)

  ist eine „Konstante der Bewegung" oder eine „Erhaltungsgröße" bei konservativen Kraftfeldern.

3.6 Zentralkräfte

3.6.1. Definition und Flächensatz

- Eine Kraft $\underline{F}(\underline{r},\underline{\dot r},t)$ heißt Zentralkraft, wenn sie stets parallel oder antiparallel zum Ortsvektor weist, d.h.

$$\underline{F} = a(\underline{r},\underline{\dot r},t)\,\hat{e}_r \qquad (3.32)$$

- Sei der Drehimpuls definiert als

$$\underline{\ell} := \underline{r} \times \underline{p} = m\underline{r}\times\underline{\dot r} \qquad (3.33)$$

- Dann gilt für einen Massenpunkt unter der Wirkung einer Zentralkraft:

$$\frac{d\underline{\ell}}{dt} = m\frac{d}{dt}(\underline{r}\times\underline{\dot r}) = m\cancel{(\underline{\dot r}\times\underline{\dot r})} + m(\underline{r}\times\underline{\ddot r}) = \underline{r}\times\underline{F} = a\,\underline{r}\times\hat{e}_r = 0 \qquad (3.34)$$

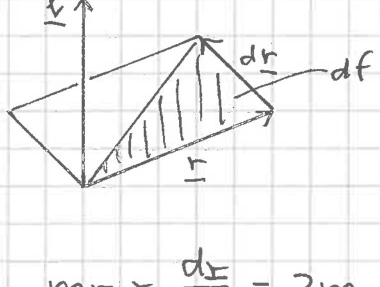
- Also ist:

$$\underline{\ell} = \text{const} = m\underline{r}_0\times\underline{v}_0 \qquad (3.35)$$

und $\underline{r}\cdot\underline{\ell} = 0$, d.h. stets ist $\underline{r}\perp\underline{\ell}$.

- Die Bewegung erfolgt in der von $\underline{r}_0$ und $\underline{v}_0$ aufgespannten Ebene senkrecht zu $\underline{\ell}$.

- $\underline{r}\times d\underline{r} =: 2\,df\,\hat{\ell}$ ist die doppelte Fläche, die der Radiusvektor auf dem Weg von $\underline{r}$ nach $\underline{r}+d\underline{r}$ überstreicht.



- Also gilt:

$$m\underline{r}\times\frac{d\underline{r}}{dt} = 2m\frac{df}{dt}\hat{\ell} = \ell\,\hat{\ell} = \text{const}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\ell}{2m} = \text{const} \qquad (3.36)$$

- Die überstrichene Fläche pro Zeiteinheit ist Konstant.

3.6.2. Zentral Kräfte im engeren Sinne

- Für diese gilt:

$$\underline{F} = f(r)\, \hat{e}_r \qquad (3.37)$$

- Sie besitzen ein Potential

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} f(r)\, dr \qquad (3.38)$$

denn:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -\underbrace{\frac{dV}{dr}}_{\overset{(3.38)}{=} f(r)} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x}}_{= \frac{x}{r}} \qquad (3.39)$$

- Folgt:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = f(r)\, \frac{x}{r} \qquad (3.40)$$

- Beispiel: Gravitationskraft mit $\underline{r} := \underline{r}_i - \underline{r}_K$

$$\boxed{\underline{F}_{Ki} = -G m_K m_i \frac{\underline{r}}{r^3} = -\frac{G m_K m_i}{r^2}\, \hat{e}_r} \qquad (3.41)$$

d.h. $f(r) = -\frac{A}{r^2}$, $A = G m_K m_i$ (3.42)

$$\boxed{V(r) = -\frac{A}{r} = -\frac{G m_K m_i}{r}} \qquad (3.43)$$

3.7. Zwei wechselwirkende Teilchen

3.7.1. Schwerpunkt- und Relativbewegung

- Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\underline{r}}_1 &= \underline{F}_{21} \\ m_2 \ddot{\underline{r}}_2 &= \underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21} \end{aligned} \qquad (3.44)$$

- Folgt $m_1 \ddot{\underline{r}}_1 + m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = 0$

- Definiere Schwerpunktkoordinate

$$\underline{r}_S := \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad (3.45)$$

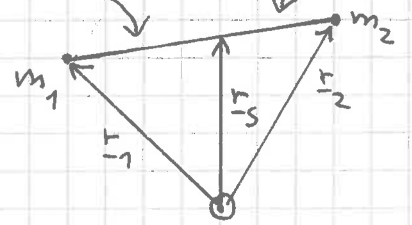
so ist $\ddot{\underline{r}}_S = 0$: Schwerpunkt bewegt sich gleichförmig.

- Definiere Relativkoordinate:

$$\underline{r} := \underline{r}_1 - \underline{r}_2 \qquad (3.46)$$

- Umkehrung:

$$\left.\begin{aligned} \underline{r}_1 &= \underline{r}_S + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\underline{r} \\ \underline{r}_2 &= \underline{r}_S - \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\underline{r} \end{aligned}\right\} \qquad (3.47)$$



„Hebelgesetz"

- (3.47) eingesetzt in (3.44)

$$\mu \ddot{\underline{r}} = \underline{F}_{21} \qquad (3.48)$$

mit „reduzierter Masse"

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (3.49)$$

3.7.2. Gravitationskraft zwischen Himmelskörpern Das Keplerproblem

a) Bewegungsgleichung, Bewegungsform, Drehimpuls

$$\mu \ddot{\underline{r}} \overset{(3.41)}{=} -\frac{A}{r^2}\,\hat{e}_r = -\nabla V(r) \qquad (3.50)$$

mit $V(r) \overset{(3.43)}{=} -\frac{A}{r}$, $A \overset{(3.42)}{=} G m_1 m_2 \qquad (3.51)$