3.8. Schwerpunkt- und Relativimpuls im Zweiteilchensystem

3.8.1. Definition Impulse

- Schwerpunktimpuls:

$$\underline{P} := (m_1+m_2)\,\dot{\underline{r}}_s \overset{(3.45)}{=} m_1\dot{\underline{r}}_1 + m_2\dot{\underline{r}}_2 = \underline{p}_1 + \underline{p}_2 \qquad (3.89)$$

- Relativimpuls:

$$\underline{p} := \mu\,\dot{\underline{r}} \underset{(3.49)}{\overset{(3.46)}{=}} \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_2\underline{p}_1 - m_1\underline{p}_2\right) \qquad (3.90)$$

- Umkehrung:

$$\left.\begin{aligned} \underline{p}_1 &= \underline{p} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\underline{P} \\ \underline{p}_2 &= -\underline{p} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\underline{P} \end{aligned}\right\} \qquad (3.91)$$

3.8.2. Kinetische Energie

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1\dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\underline{r}}_2^2 = \frac{\underline{p}^2}{2\mu} + \frac{\underline{P}^2}{2(m_1+m_2)} = T_{rel} + T_s \qquad (3.92)$$

Gesamte kinetische Energie: Summe aus der kinetischen Energie der Relativbewegung und der Schwerpunktsbewegung

3.8.3 Drehimpuls

$$\underline{L} = \underline{\ell}_1 + \underline{\ell}_2 = m_1\,\underline{r}_1\times\dot{\underline{r}}_1 + m_2\,\underline{r}_2\times\dot{\underline{r}}_2$$

$$= (m_1+m_2)\,\underline{r}_s\times\dot{\underline{r}}_s + \mu\,\underline{r}\times\dot{\underline{r}} = \underline{\ell}_s + \underline{\ell}_{rel} \qquad (3.93)$$

- Der Gesamtdrehimpuls zerfällt in die Summe aus dem Schwerpunktimpuls $\underline{\ell}_s$ relativ zum beliebig wählbaren Ursprung 0 und dem Drehimpuls der Relativbewegung. Letzterer ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems

3.9. Systeme aus endlich vielen Teilchen

3.9.1. System

- Betrachte n Massenpunkte $\{m_1, m_2, \dots m_n\}$, zwischen denen innere Kräfte $\underline{F}_{ik}$ wirken, und die äußeren Kräften $\underline{K}_i$ unterworfen sind. Die $\underline{F}_{ik}$ seien Zentralkräfte der Form

$$\underline{F}_{ik} = f_{ik}(r_{ik}) \frac{\underline{r}_k - \underline{r}_i}{r_{ik}}, \quad r_{ik} = |\underline{r}_i - \underline{r}_k| \qquad (3.94)$$

wobei $f_{ik}(r) = f_{ki}(r)$ eine skalare Funktion des Abstands ist. (s. 3.37)

3.9.2. Potentiale

- Es gilt:

$$\underline{F}_{ik} \overset{(3.38)}{=} -\nabla_k V_{ik}(r_{ik}), \quad V_{ik}(r_{ik}) \overset{(3.38)}{=} -\underbrace{\int_{r_{0ik}}^{r_{ik}} f_{ik}(r')\,dr'}_{= V_{ki}(r_{ik})} \qquad (3.95)$$

$$\nabla_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial y_k} \\ \frac{\partial}{\partial z_k} \end{bmatrix} \qquad (3.96)$$

- Es gibt ein Gesamtpotential

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} V_{ik}(r_{ik}) = V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n) \qquad (3.97)$$

und die Gesamtkraft auf die Teilchen ist:

$$\underline{F}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \underline{F}_{ik} + \underline{K}_k = -\nabla_k V(\underline{r}_1, \dots \underline{r}_n) + \underline{K}_k \qquad (3.98)$$

3.9.3. Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\underline{r}}_1 &= \underline{F}_{21} + \underline{F}_{31} + \dots + \underline{F}_{n1} + \underline{K}_1 \\ m_2 \ddot{\underline{r}}_2 &= \underline{F}_{12} + \underline{F}_{32} + \dots \underline{F}_{n2} + \underline{K}_2 \\ &\vdots \\ m_n \ddot{\underline{r}}_n &= \underline{F}_{1n} + \underline{F}_{2n} + \dots \underline{F}_{n-1,n} + \underline{K}_n \end{aligned} \qquad (3.99)$$

Oder:

$$m_K \ddot{\underline{r}}_K = \sum_{K \neq i}^{n} \underline{F}_{iK} + \underline{K}_l = -\nabla_K V(\underline{r}_1, \ldots \underline{r}_n) + \underline{K}_K \qquad (3.100)$$

mit $\underline{F}_{iK} = -\underline{F}_{Ki}$

3.10. Erhaltungsgrößen in Vielteilchensystemen

3.10.1. Der Schwerpunktsatz

- Sei $\underline{r}_S := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \underline{r}_i$ (3.101)

mit $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ (Gesamtmasse) (3.102)

- Dann folgt durch Summation der Gleichungen (3.99)

$$\boxed{M \ddot{\underline{r}}_S = \sum_{K=1}^{n} \underline{K}_K} \qquad (3.103)$$

- Der Schwerpunkt verhält sich wie ein Massenpunkt M, der sich unter den resultierenden äußeren Kräften bewegt.

3.10.2. Der Drehimpulssatz

- Es gilt für festes i:

$$\frac{d}{dt} \underline{l}_i \overset{(3.35)}{=} m_i \underline{r}_i \times \ddot{\underline{r}}_i \underset{(3.100)}{\overset{(3.94)}{=}} \sum_{K \neq i} f_{iK}(r_{iK}) \frac{\underline{r}_i \times (\underline{r}_K - \underline{r}_i)}{r_{iK}} + \underline{r}_i \times \underline{K}_i$$

$$= \sum_{K \neq i} f_{iK}(r_{iK}) \frac{\underline{r}_i \times \underline{r}_K}{r_{iK}} + \underline{r}_i \times \underline{K}_i \qquad (3.104)$$

- Summation über alle i führt zu:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \underline{l}_i \right\} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{K}_i} \qquad (3.105)$$

- Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses ist gleich dem Drehmoment der äußeren Kräfte.

3.10.3 Der Energiesatz

- Für festes i gilt (3.100). Multipliziert mit $\sum_k \dot{\underline{r}}_k$ und integrier

- Folgt mit (3.18): $(k \to i)$

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{r}}_i^2\right\} = -\sum_{i=1}^{n} \dot{\underline{r}}_i \cdot \nabla_i V + \sum_{i=1}^{n} \dot{\underline{r}}_i \, \underline{K}_i \qquad (3.106)$$

$$\frac{d}{dt} V(\underline{r}_1(t), \underline{r}_2(t), \dots \underline{r}_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \underline{r}_i} \cdot \frac{d\underline{r}_i}{dt} \qquad (3.107)$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}_i^2 \qquad (3.108)$$

- Somit insgesamt:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T+V) = \sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i \cdot \underline{K}_i} \qquad (3.109)$$

- Die zeitliche Änderung der gesamten inneren Energie

$$E = T + V \qquad (3.110)$$

ist gleich der Leistung der äußeren Kräfte.

3.10.4 Das abgeschlossene Vielteilchensystem

- Das System heißt abgeschlossen, wenn alle äußeren Kräfte $\underline{K}_i$ verschwinden

- Aus (3.103) folgt:

$$M \ddot{\underline{r}}_s = 0 \quad \text{oder} \quad M \dot{\underline{r}}_s = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{p}_i = \underline{P} = \text{const} \qquad (3.111)$$

- Impulssatz: Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten.

- Folgt: $\underline{r}_s(t) = \underline{r}_s(0) + \frac{1}{M}\underline{P}\,t$

oder $\quad \underline{r}_s(0) = \underline{r}_s(t) - \frac{1}{M}\underline{P}\,t = \text{const} \qquad (3.112)$

- <u>Schwerpunktsatz:</u> Der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems bewegt sich geradlinig-gleichförmig

- Aus (3.105) folgt:

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{\ell}_i =: \underline{L} = \text{const} \qquad (3.113)$$

- <u>Drehimpulssatz:</u> Der Gesamtdrehimpuls $\underline{L}$ ist eine Erhaltungsgröße

- Sei $\underline{r}_i' := \underline{r}_i - \underline{r}_s$ der Ort des Teilchens in Bezug auf den Schwerpunkt (3.114)

Dann gilt: $\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{r}_i' = 0 \qquad (3.115)$

- Ferner ist:

$$\underline{p}_i' := m_i \underline{\dot{r}}_i' \stackrel{(3.111)}{=} \underline{p}_i - \frac{m_i}{M}\underline{P} \qquad (3.116)$$

der Relativimpuls im Schwerpunktsystem

- Folgt: $\sum_{i=1}^{n} \underline{p}_i' \underset{(3.116)}{\stackrel{(3.111)}{=}} 0 \qquad (3.117)$

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^{n} \underline{\ell}_i \underset{(3.117)}{\stackrel{(3.115)}{=}} \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i' \times \underline{p}_i' + \underline{r}_s \times \underline{P} \qquad (3.118)$$

- Der Gesamtdrehimpuls ist Summe der Relativdrehimpulse und des Schwerpunktdrehimpulses.

- Aus (3.109) folgt:

$$E = T + V = \text{const} \qquad (3.119)$$

Die innere Energie ist Konstant: <u>Energiesatz</u>

- $$T \overset{(3.108)}{=} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 \underset{\dot{\underline{r}}_i' \cdot \dot{\underline{r}}_s = 0}{=} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\underline{r}}_i'^2 + \frac{1}{2} M \dot{\underline{r}}_s^2$$

$$\underset{(3.111)}{\overset{(3.116)}{=}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\underline{p}_i'^2}{2m_i} + \frac{\underline{P}^2}{M} \overset{(3.115)}{=} T_{rel} + T_s \qquad (3.120)$$

Also $$E = T_s + T_{rel} + V \qquad (3.121)$$

- Zusammenfassung:

Es gibt 10 Integrale der Bewegung (Erhaltungsgrößen) des abgeschlossenen Vielteilchensystems:

$$\boxed{\underline{P},\ \underline{r}_s(0),\ \underline{L},\ E} \qquad (3.122)$$

11.11.

3.11. Die Galilei-Transformation

3.11.2. Vorbemerkungen

- Physikalischer Raum: 3d euklidisch
- Zeit: 1d euklidisch
- Newton-Bewegungsgleichungen in einfachster Form geschrieben im Kartesischen Koordinatensystem, das eine euklidische Koordinatenbasis besitzt.
- Frage: Was ist die allgemeinste Transformation zwischen Kartesischen Koordinatensystemen und der Zeit, welche die Metriken und die Newtonschen Bewegungsgleichungen erhält?
  M. a. W. Was ist die allgemeinste Transformation zwischen Kartesischen euklidischen Koordinaten[systemen] von Inertialsystemen?

- Behandlung in Einzelschritten.