3.11.3 Transformationen zwischen Orthonormalbasen

- Seien $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ und $\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}$ zwei Orthonormalbasen mit

$$\hat{e}_i' = R_{ij} \hat{e}_j \qquad (3.123)$$

Dann muss gelten:

$$\hat{e}_i' \cdot \hat{e}_k' = R_{ij} \hat{e}_j \cdot R_{kl} \hat{e}_l = R_{ij} R_{kj} = \delta_{ik} \qquad (3.124)$$

d.h. die Matrix $\underline{\underline{R}}$ mit Komponenten R_{kl} muss die Bedingung

$$\underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{R}}^t = \underline{\underline{R}}^t \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}} \qquad (3.125)$$

erfüllen. $\underline{\underline{R}}$ ist eine orthogonale Matrix, die eigentliche ($\det \underline{\underline{R}} = +1$) oder uneigentliche ($\det \underline{\underline{R}} = -1$) Drehungen beschreibt und von drei Parametern abhängt. ($\hat{n} = (\vartheta, \varphi)$ der Drehachse, Drehwinkel ω, oder drei Eulerwinkel).

- Rücktransformation:

$$\hat{e}_i' R_{ik} \overset{(3.123)}{=} R_{ik} R_{ij} \hat{e}_j \overset{(3.125)}{=} \hat{e}_j \delta_{jk} = \hat{e}_k \qquad (3.126)$$

- Komponententransformation:

$$\underline{v} = v_k \hat{e}_k \overset{(3.126)}{=} R_{ik} v_k \hat{e}_i' =: v_i' \hat{e}_i' \qquad (3.127)$$

d.h. wenn $\underline{v}$ der Spaltenvektor $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ und $\underline{v}' = \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{bmatrix}$,

so gilt:

$$\underline{v}' = \underline{\underline{R}}\, \underline{v} \qquad (3.128)$$

Analog für $\underline{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

3.11.4. Verschiebungen des Ursprungs

a) Um konstanten Vektor $\underline{a}$:

$$\underline{r}' = \underline{r} + \underline{a} \qquad (3.129)$$

b) Linear zeitabhängig („Galilei-Boost")

$$\underline{r}' = \underline{r} + \underline{w}t \qquad (3.130)$$

c) Zeitnullpunkt

$$t' = \lambda t + s \qquad \lambda = \pm 1 \qquad (3.131)$$

3.11.5. Kombination zur allgemeinsten Galilei-Transformation

$$\begin{bmatrix} t \\ \underline{r} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} t' = \lambda t + s \\ \underline{r}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{r} + \underline{w}\,t + \underline{a} \end{bmatrix} \qquad (3.132)$$

- Zahl der kontinuierlichen Parameter:

  s, $\underline{\underline{R}}$ (3), $\underline{w}$ (3), $\underline{a}$ (3), d.h. 10, ebensoviele wie

  Erhaltungsgrößen in abgeschlossenen Vielteilchensystemen.

- Entsprechung:

$$\left.\begin{aligned} s &\longleftrightarrow E \\ \underline{a} &\longleftrightarrow \underline{P} \\ \underline{\underline{R}} &\longleftrightarrow \underline{\ell} \\ \underline{w} &\longleftrightarrow \underline{r}_s(0) \end{aligned}\right\} \qquad (3.133)$$

- $\underline{\underline{R}}$ mit $\det \underline{\underline{R}} = -1$ Drehung plus Inversion

  rechtshändiges $\longleftrightarrow$ linkshändiges Dreibein

  $\lambda = -1$: Zeitinversion $\underline{r} \to \underline{r}$, $\underline{v} \to -\underline{v}$, $\underline{p} \to -\underline{p}$

- Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Lorentztransformationen.

3.13. Bewegte Bezugssysteme

3.13.1. Verschiedene Zeitableitungen

a) Transformationen

- Geg.: raumfestes Bezugssystem mit Orthonormalbasis $\{\hat{e}_1^0, \hat{e}_2^0, \hat{e}_3^0\}$ und ein zeitabhängiges gedrehtes ONB $\{\hat{e}_1(t), \hat{e}_2(t), \hat{e}_3(t)\}$

- Transformationsformeln (invers zu (3.128))

$$\hat{e}_i(t) = \hat{e}_j^0 \, R_{ji}(t) =: R(t)\, \hat{e}_i^0 \qquad (3.160)$$

$$\hat{e}_j^0 \overset{(3.126)}{=} R_{ji}(t)\, \hat{e}_i(t) =: R^{-1}(t)\, \hat{e}_i(t) \qquad (3.161)$$

- Sei u ein Vektor mit

$$u =: \tilde{u}_i \, \hat{e}_i(t) = u_i \, \hat{e}_i^0 \qquad (3.162)$$

- Dann gilt für die Spaltenvektoren $\underline{u}, \tilde{\underline{u}}$

$$\left.\begin{aligned} \underline{u}(t) &= \underline{\underline{R}}(t)\, \tilde{\underline{u}} \\ \tilde{\underline{u}} &= \underline{\underline{R}}^{-1}(t)\, \underline{u} = \underline{\underline{R}}^{t}(t)\, \underline{u} \end{aligned}\right\} \quad (3.163)$$

- Sei $\tilde{\underline{u}}$ zeitlich konstant. Dann gilt:

$$\frac{d\underline{u}}{dt} =: \dot{\underline{u}} \overset{(3.163)}{=} \dot{\underline{\underline{R}}}(t)\, \tilde{\underline{u}} \overset{(3.163)}{=} \dot{\underline{\underline{R}}}(t)\, \underline{\underline{R}}^{-1}(t)\, \underline{u}(t) \qquad (3.164)$$

b) Rotationsmatrizen

- Es gilt: $\underline{\underline{R}}(t)\, \underline{\underline{R}}^{-1}(t) = \underline{\underline{R}}(t)\, \underline{\underline{R}}^{t}(t) = 1 \qquad (3.165)$

$$\underline{\underline{0}} = \dot{\underline{\underline{R}}}\, \underline{\underline{R}}^t + \underline{\underline{R}}\, \dot{\underline{\underline{R}}}^t = \dot{\underline{\underline{R}}}\, \underline{\underline{R}}^t + (\dot{\underline{\underline{R}}}\, \underline{\underline{R}}^t)^t$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{\underline{R}}}\, \underline{\underline{R}}^t = -(\dot{\underline{\underline{R}}}\, \underline{\underline{R}}^t) \quad \text{und damit schiefsymmetrisch}$$

$$\underline{\underline{\dot{R}}}\,\underline{\underline{R}}^t = \underline{\underline{\dot{R}}}\,\underline{\underline{R}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & +\omega_2 \\ +\omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & +\omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times = \underline{\omega} \times \quad (3.166)$$

- Somit gilt für einen mitgedrehten Vektor:

$$\dot{\underline{u}} = \underline{\underline{\dot{R}}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}\,\underline{u} = \underline{\omega} \times \underline{u} \quad (3.167)$$

c) Die Zeitableitung im bewegten Bezugssystem

- Sei nun $\tilde{u} = \tilde{u}(t)$
- Definiere $\frac{d'}{dt} u := \dot{\tilde{u}}_j(t)\, \hat{e}_j(t) \quad (3.168)$

  d.h. nur die Änderung der Komponente im bewegten Bezugssystem wird wahrgenommen

- Nebenrechnung und Notation:

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_j(t) = \dot{R}(t)\,\hat{e}_i^0 = \dot{R}(t)\,R^{-1}(t)\,\hat{e}_j(t) \quad (3.169)$$

$$Ru = u_i R \hat{e}_i^0 = \tilde{u}_j R \hat{e}_j(t) \quad (3.170)$$

- Folgt:

$$\frac{d}{dt}u = \frac{d}{dt}\tilde{u}_j(t)\,\hat{e}_j(t) =$$

$$= \dot{\tilde{u}}_j(t)\,\hat{e}_j(t) + \tilde{u}_j(t)\,\dot{\hat{e}}_j(t) =$$

$$= \frac{d'}{dt}u + \tilde{u}_j(t)\,\dot{R}(t)\,R^{-1}(t)\,\hat{e}_j(t) =$$

$$= \frac{d'}{dt}u + \dot{R}(t)\,R^{-1}(t)\,u \quad (3.171)$$