• Zusammenfassung

Abstrakt: $\frac{du}{dt} = \frac{d'u}{dt} + \dot{R}(t)\, R^{-1}(t)\, u$

In Basis $\hat{e}_j^{0}$: $\frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{d'\underline{u}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{u}$ (3.172)

mit $\underline{\omega} \times = \dot{\underline{\underline{R}}}(t)\, \underline{\underline{R}}^{-1}(t)$ (3.173)

• In Basis $\hat{e}_j(t)$:

$$\frac{d\tilde{\underline{u}}}{dt} = \frac{d'\tilde{\underline{u}}}{dt} + \tilde{\underline{\omega}} \times \tilde{\underline{u}} \qquad (3.174)$$

mit $\tilde{\underline{a}} = \underline{\underline{R}}^{+}\, \underline{a}$

3.14.2. Beschleunigungen und Scheinkräfte

• Betrachte eine Bahn $\underline{r}(t)$ in beiden Bezugssystemen

• Es gilt: für die Geschwindigkeit:

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} \overset{(3.172)}{\underset{(3.174)}{=}} \frac{d\underline{r}'}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r} =: \underline{v}' + \underline{\omega} \times \underline{r} \qquad (3.175)$$

und für die Beschleunigung:

$$\underline{a} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{d'}{dt}\left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right) + \underline{\omega} \times \frac{d\underline{r}}{dt} =$$

$$\overset{(3.175)}{=} \frac{d'}{dt}\left\{\frac{d'\underline{r}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r}\right\} + \underline{\omega} \times \left\{\frac{d\underline{r}'}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r}\right\} =$$

$$= \frac{d'^2\underline{r}}{dt} + \frac{d'\underline{\omega}}{dt} \times \underline{r} + 2\, \underline{\omega} \times \frac{d'\underline{r}}{dt} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \qquad (3.176)$$

• NB! $\frac{d'\underline{\omega}}{dt} = \frac{d\underline{\omega}}{dt} - \underline{\omega} \cancel{\times \underline{\omega}}$ (3.177)

• Bewegungsgleichungen im Inertialsystem:

$$m \frac{d\underline{r}^2}{dt} = m\underline{a} = \underline{F} \qquad (3.178)$$

- Im rotierenden System:

$$m\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} =: m\underline{a}' \overset{(3.176)}{=} \underline{F} - 2m\underline{\omega}\times\underline{v}' - m\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r})$$

$$- m\dot{\underline{\omega}}\times\underline{r} \qquad (3.179)$$

- Scheinkräfte:

– Coriolis Kraft: $\underline{F}_C = -2m\underline{\omega}\times\underline{v}'$ (3.180)

senkrecht zu $\underline{v}'$

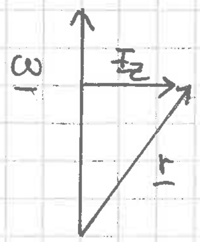
Nordhalbkugel: Geschoß, Kugel, Luftmassen (H, T), Foucault-Pendel nach rechts, fallender Körper nach Osten abgelenkt

– Zentrifugal Kraft: $\underline{F}_Z = -m\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) =$

$$= m\omega^2\underline{r} - m\underline{\omega}(\underline{\omega}\cdot\underline{r}) = m\omega^2\{1 - \hat{\underline{\omega}}\otimes\hat{\underline{\omega}}\}\cdot\underline{r} \qquad (3.181)$$

Matrix

senkrecht zu $\underline{\omega}$, in der von $\underline{\omega}$ und $\underline{r}$ aufgespannten Ebene



NB! $\omega^2 R = 3{,}38\ \text{cm}\ s^{-2} = 0{,}3\%\ g$

– Unbenannte Kraft: $\underline{F}_{\omega} = -m\dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}$ (3.182)

– Applet zu Corioliskraft (u.a.)

http:/www.cmt.phys.kyushu-u.ac.jp/virtuallab/phys/ /physmath/index-e.html

4. Prinzipien der kanonischen Mechanik

- Erlauben eine allgemeinere Formulierung der newtonschen Mechanik und
- die Behandlung einer erweiterten Klasse von Systemen mit Zwangsbedingungen : Bspw. auf Kugel
- Bilden Fundament und Begriffsrahmen für andere Theorien, z.B die Quantenmechanik

4.1. Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten

4.1.1. Definition und Charakterisierung von Zwangsbedingungen

- Zwangsbedingungen liegen vor, wenn sich Massenpunkte eines mechanischen Systems nicht unabhängig voneinander bewegen können.

  Bewegung auf Flächen, starre Verbindungen, ...

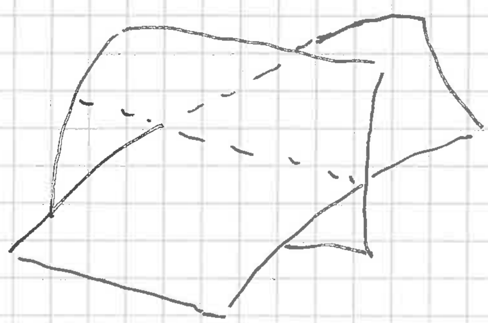
- Arten von Zwangsbedingungen

a) Holonome Zwangsbedingungen

- Werden für ein n-Teilchensystem durch r unabhängige Gleichungen

$$f^L(\underline{r}_1, \dots \underline{r}_n; t) = 0 \qquad L = 1, 2, \dots, r \qquad (4.1)$$

beschrieben. <Flächen im Konfigurationsraum>



- „Unabhängig": Für alle $\underline{r}_1, \dots \underline{r}_n$ und alle t ist

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \frac{\partial f^2}{\partial x_1} & \frac{\partial f^3}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f^r}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f^1}{\partial y_1} & \frac{\partial f^2}{\partial y_1} & & & \frac{\partial f^r}{\partial y_1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f^1}{\partial z_n} & \frac{\partial f^2}{\partial z_n} & & & \frac{\partial f^r}{\partial z_n} \end{pmatrix} = r \qquad (4.2)$$

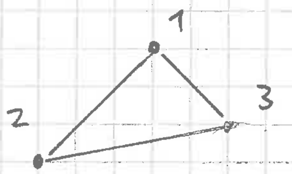
- d.h. die Flächen laufen nirgends parallel.

- Durch holonome Zwangsbedingungen wird die Zahl der Freiheitsgrade von $3n$ auf $3n - r$ reduziert.

- Beispiel: Drei Teilchen mit starren Abständen

$$\left.\begin{aligned} f^1(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3) &= |\underline{r}_2 - \underline{r}_3| - a_1 = 0 \\ f^2(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3) &= |\underline{r}_3 - \underline{r}_1| - a_2 = 0 \\ f^3(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3) &= |\underline{r}_1 - \underline{r}_2| - a_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

$r = 3$, $f = 9 - 3 = 6$: Schwerpunkt, Lage im Raum



- Andere Formulierung:

$$\frac{\partial f^l}{\partial t} = \nabla_i\, f(\underline{r}_1, \dots \underline{r}_n; t) \cdot \frac{d\underline{r}_i}{dt} + \frac{\partial f^l}{\partial t} = 0 \qquad (4.4)$$

- oder

$$\nabla_i\, f^l(\underline{r}_1, \dots \underline{r}_n; t) \cdot \underline{v}_i + \frac{\partial f^l}{\partial t} = 0 \qquad (4.5)$$

oder

$$df^l = \nabla_i f^l(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n; t) \cdot d\underline{r}_i + \frac{\partial f^l}{\partial t} dt = 0 \qquad (4.6)$$

„vollständiges Differenzial"
Fläche im Kleinen, aber integrabel

b) Nichtholonome Zwangsbedingungen

- Sind von der Form

$$\underline{\omega}_i^l(\underline{r}_1, \dots \underline{r}_n; t) \cdot \underline{v}_i + \omega_t^l(\underline{r}_1 \dots \underline{r}_n; t) = 0, \quad l = 1, \dots, r \qquad (4.7)$$

oder

$$\omega^l := \underline{\omega}_i^l(\underline{r}_1, \dots \underline{r}_n; t) \cdot d\underline{r}_i + \omega_t^l(\underline{r}_1, \dots \underline{r}_n; t)\, dt = 0 \qquad (4.8)$$

„Pfaffsche Form" oder „unvollständiges Differenzial"
nicht (direkt) integrierbar.

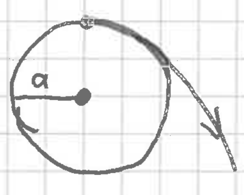
- Keine weitere Diskussion, ⟨aber Thermodynamik (Entropie)⟩

c) Zeitabhängigkeit

- Zwangsbedingungen zeitabhängig: „rheonom"
- Explizit zeitunabhängig: „skleronom"

d) Weitere Zwangsbedingungen

- z.B. Ungleichungen (Gas im Behälter, Teilchen im Halbraum, Teilchen auf Kugeloberfläche: $r^2 - a^2 \geq 0$



Wann verlässt das Teilchen die Oberfläche?